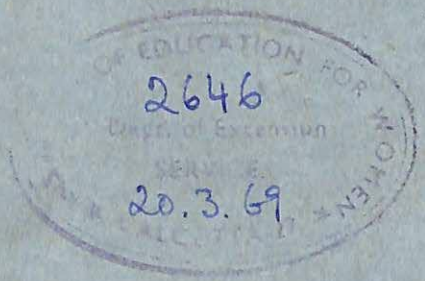
জন্মাষ্টমী

প্রথম খণ্ড



শ্রীচক্রবর্ত্তী
ও
শ্রীআনন্দ চরণ গুপ্ত

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষাপর্ষৎ কর্তৃক অনুমোদিত
(১৬।১২।১৯৫৪ তারিখের কলিকাতা গেজেটে ২৭।১১।১৯৫৪ তারিখের সিল/৬৪।৫৪ নং বিজ্ঞপ্তিদ্রষ্টব্য)

জ্যামিতি

প্রথম খণ্ড

(মাধ্যমিক, উচ্চ মাধ্যমিক ও বহুমুখী বিদ্যালয়ের
সপ্তম ও অষ্টম শ্রেণীর পাঠ্য)

কলিকাতা সুরেন্দ্রনাথ কলেজিয়েট-স্কুলের অবসরপ্রাপ্ত প্রধান গণিত-শিক্ষক
শ্রীচারুচন্দ্র চক্রবর্তী
ও
কলিকাতা রাণী ভবানী স্কুলের অবসরপ্রাপ্ত প্রধান গণিত-শিক্ষক
শ্রীমানদাচরণ গুপ্ত
প্রণীত

INSTITUTE OF EDUCATION FOR WOMEN
2646
Dept. of Extension
SERVICE
20.3.69
CALCUTTA-17

আধুনিক প্রকাশক
১৯৭-বি, মুক্তারামবাবু স্ট্রীট, কলিকাতা-৭

[মূল্য 2 টাকা 34 পয়সা

সর্বস্বত্ব সংরক্ষিত]

আধুনিক প্রকাশক পক্ষে
প্রকাশক : শ্রীভূপেন্দ্রনাথ বসু, এম. এ.
১৯৭-বি, মুক্তারামবাবু স্ট্রীট, কলিকাতা-৭

বিংশ সংস্করণ—১৯৬৮ সন

মুদ্রাকর : শ্রীকার্তিকচন্দ্র পাণ্ডা
মুদ্রণী
৭১, কৈলাস বোস স্ট্রীট, কলিকাতা-৬

সূচীপত্র

প্রথম খণ্ড

(সপ্তম ও অষ্টম শ্রেণীর পাঠ্য)

সপ্তম শ্রেণীর পাঠ্যাংশ

বিষয়		পৃষ্ঠাঙ্ক
প্রথম অধ্যায়	—সংজ্ঞা	1
দ্বিতীয় অধ্যায়	—পরীক্ষামূলক প্রাথমিক তথ্য	20
	ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ ও বহুভুজের কোণসমষ্টি নির্ণয়	20
	ত্রিভুজের বহিঃকোণ ও বিপরীত অন্তঃকোণের সম্বন্ধ	26
	ত্রিভুজের বাহু ও কোণের পরস্পর সম্বন্ধ ...	28
	দুইটি উপপাদ্যের পরীক্ষামূলক প্রমাণ ...	32
তৃতীয় অধ্যায়	—ত্রিভুজ অঙ্কন	35
চতুর্থ অধ্যায়	—দুইটি সর্বসম ত্রিভুজ ও সামান্তরিকের ধর্ম ...	39
পঞ্চম অধ্যায়	—সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা	43
ষষ্ঠ অধ্যায়	—সমান্তরাল সরলরেখার বিশেষ ধর্ম ...	54
সপ্তম অধ্যায়	—ছক কাগজের ব্যবহার	62

অষ্টম শ্রেণীর পাঠ্যাংশ

অষ্টম অধ্যায়	—সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা—বৃত্তাঙ্কন	71
নবম অধ্যায়	—কতিপয় প্রতিজ্ঞার ব্যবহারিক প্রমাণ ...	74
দশম অধ্যায়	—বৃত্তের স্পর্শক	83
একাদশ অধ্যায়	—উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা (1-16)	87
দ্বাদশ অধ্যায়	—সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা (1-16)	145
পরিশিষ্ট	—জ্যামিতির নৈর্ব্যক্তিক পরীক্ষা	175

INSTITUTE OF EDUCATION FOR WOMEN
2646
Dept. of Extension SERVICE
20.3.69
CALCUTTA-17

প্রথম খণ্ড

(সপ্তম ও অষ্টম শ্রেণীর পাঠ্য)

সপ্তম শ্রেণীর পাঠ্যাংশ

প্রথম অধ্যায়

সংজ্ঞা

1. জ্যামিতি—জ্যা ও মিতি এই দুইটি শব্দের সমবায়ে জ্যামিতি শব্দটি উৎপন্ন। জ্যা শব্দের অর্থ ভূমি এবং মিতি অর্থ পরিমাণ। সুতরাং ভূমির পরিমাণ বিষয়ক আলোচনা হইতেই এই শাস্ত্রের উৎপত্তি হইয়াছে।

অতি প্রাচীনকালে বৈদিক যুগে ভারতীয় আর্য ঋষিগণ যজ্ঞের জন্য বিভিন্ন আকারের বেদী রচনা করিতেন। এই সমস্ত বেদী বিশুদ্ধ ভাবে নির্মাণ করিবার জন্য তাঁহারা কতিপয় সূত্র বা নিয়ম প্রবর্তিত করেন। এই সূত্রগুলি 'শুল্বসূত্র' নামে পরিচিত। বৈদিক কল্পসূত্রের অন্তর্গত এই শুল্ব সূত্রগুলি হইতেই জ্যামিতি শাস্ত্র ক্রমশঃ পূর্ণাঙ্গতা লাভ করে। Prof. Dr. Burnell-এর মতে প্রাচীন ভারতীয় ঋষিগণই জ্যামিতি শাস্ত্রের আদি প্রবর্তক—বৈদিক কল্পসূত্রের 'শুল্ব' অংশই তাহার নিদর্শন।

বৈদিক ঋষিগণের পরে যে সমস্ত ভারতীয় গণিতবিদ্ জ্যামিতি শাস্ত্রের উন্নতি বিধান করেন তাঁহাদের মধ্যে ব্রহ্মগুপ্ত, ভাস্করাচার্য, মুনীশ্বরগণক প্রভৃতির নাম বিশেষভাবে উল্লেখযোগ্য।

মিসরদেশে বর্ষাকালে নীলনদের প্লাবনে উভয় তীর জলমগ্ন হইত এবং তাহার ফলে জমির সীমানা বিলুপ্ত হইয়া যাইত। বর্ষান্তে পুনরায় জরিপ করিয়া জমির সীমা নির্দেশ করা হইত। এইভাবে জমির পরিমাণ এবং সীমা নির্ধারণের জন্যই মিসরে প্রথম জ্যামিতির আলোচনা আরম্ভ হয় এবং মিসরীয়গণ ব্যবহারিক জ্যামিতিতে বিশেষ অভিজ্ঞতা লাভ করেন।

জ্যামিতির জন্মস্থান ভারতবর্ষই হউক আর মিসরই হউক তাহা ঐতিহাসিক গবেষণার বিষয়। কিন্তু ভারতবর্ষ বা মিসর কোন দেশেই জ্যামিতির সূত্রগুলি ধারাবাহিক শৃঙ্খলার সহিত বিধিবদ্ধ হয় নাই। সূত্রগুলি যখন যেমন প্রয়োজন তখন তেমনি রচিত হইয়াছিল এবং শৃঙ্খলাহীন ভাবে বহুদিন ইতস্ততঃ বিক্ষিপ্ত ছিল। গ্রীকগণই প্রথম ইহাদিগকে বিধিবদ্ধ শৃঙ্খলার উপর প্রতিষ্ঠিত করেন।

প্রাচীন গ্রীকগণ মিসর হইতে জ্যামিতি শিক্ষা করেন। প্রসিদ্ধ গ্রীক পণ্ডিত থেলস (Thales) প্রথম মিসর হইতে জ্যামিতি শিক্ষা করিয়া গ্রীসে উহা প্রচার করেন। এই শাস্ত্রের অভিনবতায় আকৃষ্ট হইয়া বহু গ্রীক পণ্ডিত তাঁহার শিষ্যত্ব গ্রহণ করেন, তন্মধ্যে পিথাগোরাস (Pythagoras) এই শাস্ত্রের প্রভূত উন্নতি সাধন করেন। কিন্তু জ্যামিতি-শাস্ত্রের সহিত যাঁহার নাম অবিচ্ছেদ্যভাবে জড়িত তিনি বিশ্ববিশ্রুত গ্রীক জ্যামিতিবিদ্ ইউক্লিড (Euclid)। ঐতিহাসিকগণ খৃঃ পূঃ তৃতীয় শতাব্দীতে তাঁহার জন্মকাল অনুমান করেন। ইতস্ততঃ বিক্ষিপ্ত সূত্রগুলিকে তিনিই প্রথম বিধিবদ্ধভাবে সজ্জিত করিয়া বিশুদ্ধ ঔপপত্তিক বিজ্ঞানের আকারে গ্রন্থ রচনা করেন। এই গ্রন্থখানি 'Euclid's Elements' নামে পরিচিত এবং ত্রয়োদশ খণ্ডে বিভক্ত। ইহার প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ ও ষষ্ঠ খণ্ডে একই সমতলস্থ রেখা ও ক্ষেত্রাদির তত্ত্ব, পঞ্চম খণ্ডে সমানুপাত বিষয়ক তত্ত্ব, সপ্তম, অষ্টম ও নবম খণ্ডে সংখ্যা বিষয়ক তত্ত্ব, দশম খণ্ডে অমেয় সংখ্যা বিষয়ক তত্ত্ব এবং একাদশ, দ্বাদশ ও ত্রয়োদশ খণ্ডে ঘন পরিমাণ বিষয়ক তত্ত্ব আলোচিত হইয়াছে। বর্তমানে আমাদের দেশের প্রথমশিক্ষার্থিগণকে ইউক্লিডের সামতলিক জ্যামিতির সারাংশই অল্পবিস্তর পরিবর্তন করিয়া শিক্ষা দেওয়া হয়। গ্রীসদেশ হইতে এই শাস্ত্র ইউরোপের অন্যান্য দেশে প্রচারিত হয় এবং ভিন্ন ভিন্ন ভাষায় অনূদিত হয়।

কতকগুলি মূলতত্ত্বের উপর ভিত্তি করিয়া ইউক্লিড সমগ্র জ্যামিতি-শাস্ত্র রচনা করেন। সেইগুলি জ্যামিতির প্রথম আলোচ্য বিষয়।

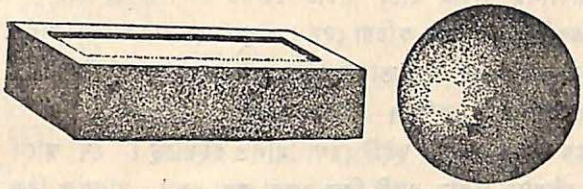
2. মাত্রা, ঘন, তল, রেখা ও বিন্দুর পরিচয়।

জগতে যে সমস্ত পদার্থ আমাদের দৃষ্টিগোচর হয় তাহারা প্রত্যেকেই কিছু না কিছু স্থান অধিকার করিয়া থাকে। প্রত্যেক বস্তুই তিনটি দিক্ অধিকার করে—দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং বেধ। এই তিনটি দিকের প্রত্যেকটিকেই পদার্থের মাত্রা (Dimension) বলে। এই মাত্রা বা অধিকৃত স্থানের দিক্ হইতেই পদার্থের রূপ বা আকৃতি সম্বন্ধে আমাদের ধারণা জন্মে।

উদাহরণস্বরূপ একখানি ইষ্টক লইয়া দেখ, ইহাও তিনটি দিক্ অধিকার করিয়া রহিয়াছে। ইহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং বেধ তিনটি স্পষ্টই দেখা যায়।

একটি গোলকের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ বা বেধের পৃথক্ পৃথক্ ভাবে ধারণা অসম্ভব বটে, কিন্তু উহাকে দৈর্ঘ্য-প্রস্থ-বেধ-বিশিষ্ট বহুসংখ্যক ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশের সমষ্টি বলিয়া কল্পনা করা যাইতে পারে।

এইরূপে যাবতীয় দৃশ্যমান পদার্থই তিনটি দিক্ অধিকার করিয়া অবস্থান করে। সুতরাং প্রত্যেক পদার্থদ্বারা অধিকৃত স্থানই ত্রিমাত্রক বা তিনটি মাত্রা বিশিষ্ট। ত্রিমাত্রককে জ্যামিতির ভাষায় ঘন বলে, অর্থাৎ—



যাহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ আছে তাহাকে ঘন (Solid) বলে।

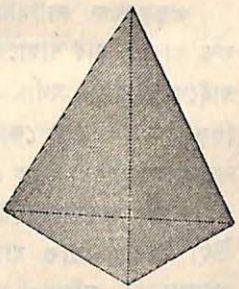
আবার ইষ্টকটি বা গোলকটির উপরিভাগ লক্ষ্য করিয়া দেখ, ইহা যেন বস্তুটিকে বহির্দেশ হইতে পৃথক করিয়া রাখিয়াছে। বস্তুর এই যে উপরিভাগ, যাহা মাত্র স্পর্শ করিয়া অনুভব করা যায় কিন্তু বস্তুটি হইতে পৃথক করা যায় না, তাহাকে তল বলে ; সুতরাং—

প্রত্যেক ঘন পদার্থের উপরিভাগকে তল বা পৃষ্ঠ (Surfce) বলা যায়।

তলের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে কিন্তু বেধ নাই। সুতরাং তল দ্বিমাত্রক।

লক্ষ্য করিয়া দেখ ইষ্টকখানির ছয়টি তল এবং ঐ ছয়টি তল দ্বারা ইষ্টকখানি সম্পূর্ণভাবে সীমাবদ্ধ।

গোলকটি লক্ষ্য করিয়া দেখ উহার একটি মাত্র তল আছে এবং ঐ একটিমাত্র তলদ্বারা গোলকটি সীমাবদ্ধ।



একটি ত্রিকোণ পিরামিড লইয়া দেখ উহা চারিটি তল দ্বারা সীমাবদ্ধ। এইরূপে ঘন পদার্থ মাত্রই এক বা একাধিক তলদ্বারা সীমাবদ্ধ।

ইষ্টকখানির দুই দুইটি তল যেখানে মিলিত হইয়াছে সেই স্থানটি লক্ষ্য করিয়া দেখ। সেখানে দৈর্ঘ্য ব্যতীত আর কিছুই নাই। উহার প্রস্থ থাকিতে পারে না, কারণ, প্রস্থ থাকিলে উহা তল দুইটির যে কোন একটিরই অংশ অর্থাৎ তল হইবে। আবার দুইটি তলের যেখানে মিলন সেখানে বেধ থাকিতে পারে না, কারণ তলের নিজেরই বেধ নাই।

এইরূপে যাহা দ্বারা তলের সীমা নির্ধারিত হয় তাহাকে রেখা বলে। সুতরাং যাহার কেবল দৈর্ঘ্য আছে কিন্তু প্রস্থ বা বেধ নাই তাহাকে রেখা (Line) বলে। অতএব রেখা একমাত্রক।

ইষ্টকখানির বারটি ধারে বারটি রেখার উৎপত্তি হইয়াছে। এইবার ইষ্টকখানির একটি কোণ লক্ষ্য করিয়া দেখ। পূর্বোক্ত আলোচনা অনুসারে যাহাদ্বারা তলের সীমা সূচিত হয় তাহাকেই রেখা কল্পনা করা হইয়াছে। ইষ্টকখানির একটি কোণ লক্ষ্য করিলে দেখিবে সেখানে প্রত্যেক তলের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের দুই ধারের সীমাসূচক দুই দুইটি রেখা মিলিত হইয়াছে। যে স্থানে দুইটি রেখা মিলিত হইয়াছে তথায় একটি বিন্দু কল্পনা করা হয়। যাহাকে বিন্দু বলিয়া কল্পনা করা হয় তাহা উক্ত দুই রেখার কোনটিরই অংশ নহে, কারণ, তাহা হইলে রেখার অংশ বলিয়া উহাও একটি রেখা বলিয়া গণ্য হইবে। সুতরাং বিন্দুর কোনরূপ দৈর্ঘ্য নাই। আবার দুই রেখার মিলনস্থানে ইহার উৎপত্তি বলিয়া ইহার প্রস্থ বা বেধও নাই, কারণ রেখার প্রস্থ বা বেধ নাই। ইহা দ্বারা রেখার কেবলমাত্র সীমা সূচিত হয়।

সুতরাং বিন্দুর মাত্র অবস্থানেরই কল্পনা করা হইয়া থাকে, অতএব,

যাহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ বা বেধ কোন মাত্রাই নাই, আছে কেবল অবস্থান, তাহাকে বিন্দু (Point) বলে। সুতরাং বিন্দু মাত্রাহীন।

প্রকৃতপক্ষে জ্যামিতিক বিন্দু, রেখা ও তল কল্পনা মাত্র। জগতে এমন কোন জড় পদার্থ নাই যাহাকে কেবল বিন্দু, রেখা বা তলের উদাহরণ স্বরূপ উল্লেখ করা যাইতে পারে। অর্থাৎ এই পদার্থটি বিন্দু, রেখা বা তল এবং তদ্ব্যতীত আর কিছুই নহে এরূপ কোন পদার্থ নাই। ঘনপদার্থকে আশ্রয় করিয়াই ইহাদের কল্পনা করা হইয়া থাকে।

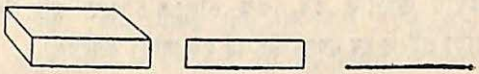
সংজ্ঞা অনুসারে বিন্দু, রেখা ও তলের অনুরূপ কোন পদার্থ নাই। সুতরাং উহা তৈরী করাও যায় না, বা অঙ্কন করিয়াও দেখান যায় না। তথাপি আলোচনার সুবিধার জন্য কাগজের উপর পেন্সিলের অগ্রভাগ দ্বারা যথাসম্ভব সূক্ষ্ম একটি দাগ বা ফুট্‌কি দ্বারা বিন্দু এবং পেন্সিলের অগ্রভাগটি একদিক্ হইতে অন্যদিকে টানিলে কাগজের উপর যে দাগ পড়ে তাহা দ্বারা রেখা দেখান হয়। এই অঙ্কনক্রিয়া যত সূক্ষ্ম হইবে অঙ্কিত প্রতিরূপ বা ছবিটি জ্যামিতিক কল্পনার তত অধিক অনুরূপ হইবে।

জ্যামিতিক কল্পনানুরূপ বিন্দু প্রভৃতির প্রকৃত চিত্রাঙ্কন অসম্ভব হইলেও যেরূপ

চিত্রেরই সাহায্যে আমরা উহার আলোচনা করি না কেন উহাদের কল্পনানুরূপ গুণ ছাড়া অন্য কোন গুণের অস্তিত্ব আমরা স্বীকার করিব না।

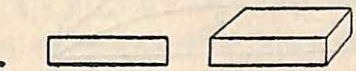
উক্ত আলোচনায় ঘন হইতে তল, তল হইতে রেখা, রেখা হইতে বিন্দুর উৎপত্তি দেখান হইয়াছে, অর্থাৎ

ঘন পদার্থের পৃষ্ঠ বা বহিরাবরণ হইল তল, তলের সীমা হইল রেখা, রেখার সীমা হইল বিন্দু।



বিন্দু হইতেও ঘন পদার্থের কল্পনায় উপনীত হওয়া যায়ঃ

একটি গতিশীল বিন্দু যে কোন দিকে চলিলে রেখার উৎপত্তি হয়, একটি গতিশীল রেখা তল উৎপন্ন করে, একটি গতিশীল তল ঘন উৎপন্ন করে।

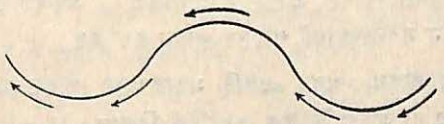


উক্ত কল্পনা অনুসারে বিন্দুর সমবায়ে রেখা, রেখার সমবায়ে তল এবং তলের সমবায়ে ঘনের উৎপত্তি কল্পনা করা হয়।

রেখা দুই প্রকার—সরল ও বক্র।

সরলরেখা (Straight line)—যে রেখার প্রত্যেক অংশ একই দিকে প্রসারিত তাহাকে সরলরেখা বলে।

বক্ররেখা (Curved line)—যে রেখার বিভিন্ন অংশ বিভিন্ন দিকে প্রসারিত তাহাকে বক্ররেখা বলে।



সুতরাং সরলরেখাকে উভয় দিকে যথেচ্ছভাবে বর্ধিত করিলে উহার কোন দিক্ পরিবর্তন হয় না। অতএব,

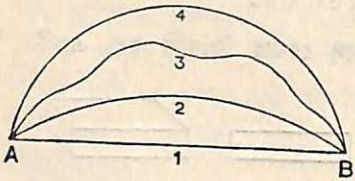
যে রেখার এক বিন্দু হইতে অপর যে কোন বিন্দুতে যাইতে দিক্ পরিবর্তন করিতে হয় না তাহাকে সরলরেখা বলে, আর, যে রেখার এক বিন্দু হইতে অপর

কোন বিন্দুতে যাইতে ক্রমাগতই দিক্ পরিবর্তন করিতে হয় তাহাকে বক্ররেখা বলে।

একটি গতিশীল বিন্দু দ্বারা রেখার উৎপত্তি কল্পনা করিলে বলা যায় যে,

যদি কোন বিন্দু দিক্ পরিবর্তন না করিয়া চলিতে থাকে তবে একটি সরল-রেখার উৎপত্তি হয়, কিন্তু চলিতে চলিতে যদি উহা ক্রমাগত দিক্ পরিবর্তন করে তাহা হইলে যে রেখা উৎপন্ন হয় তাহা বক্ররেখা।

পার্শ্বের চিত্রে A-বিন্দু হইতে B-বিন্দুতে যাইতে 1, 2, 3, 4 চিহ্নিত চারিটি পথের মধ্যে 1-চিহ্নিত পথটিই সর্বাপেক্ষা সোজা (বা সরল) অর্থাৎ A হইতে B-তে যাইতে 1-চিহ্নিত পথ ব্যতীত অন্য সব পথেই বেশী দূর পথ অতিক্রম করিতে হইবে। 1-চিহ্নিত পথেই A হইতে B-র দূরত্ব ন্যূনতম। এইরূপ ব্যাখ্যা হইতে বলা যায় যে,



দুই বিন্দুর ন্যূনতম দূরত্বই সরলরেখা। এতদ্ব্যতীত যে কোন দীর্ঘতর দূরত্বকে বক্ররেখা বলিয়া অভিহিত করা যাইতে পারে। সরলরেখার বিভিন্ন ধর্ম বা গুণকে ভিত্তি করিয়া গণিতজ্ঞগণ সরলরেখার নানারূপ সংজ্ঞা দিয়াছেন।

সংজ্ঞা হইতে সরলরেখার ধর্ম বা গুণ সম্বন্ধে জানিতে পারা যায় যে,

(1) এক বিন্দু হইতে অপর এক বিন্দু পর্যন্ত একটি মাত্র সরলরেখা টানা যায়, কারণ দুই বিন্দুর মধ্যে ন্যূনতম দূরত্ব একাধিক সম্ভব নহে।

(2) কোন সরলরেখার যে কোন অংশ জানিলেই সমগ্র রেখাটিকে জানা যায়, কারণ উহার সমস্ত অংশই একদিকে প্রসারিত। এইজন্য দুইটি মাত্র অক্ষর দ্বারা সসীম যে কোন সরলরেখারই পরিচয় প্রদান করা হয়।

(3) একটি সরলরেখা অপর একটি সরলরেখার সহিত একাধিক বিন্দুতে মিলিত হইতে পারে না অথবা উহাকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করিতেও পারে না। সুতরাং দুইটি সরলরেখা দ্বারা কোন স্থান সীমাবদ্ধও হইতে পারে না। অন্যভাবে ধরিলে, একটি সরলরেখার দুই বিন্দু অপর একটি সরলরেখার দুই বিন্দুর সহিত মিলিত হইলে উভয় সরলরেখা মিলিত হইয়া একটি মাত্র সরলরেখায় পরিণত হয়।

(4) বিভিন্নদিকে প্রসারিত দুই বা ততোধিক সরলরেখার মধ্যে একটি বিন্দু ব্যতীত আর কোন সাধারণ অংশ থাকিতে পারে না। সুতরাং একটি বিন্দুর মধ্য দিয়া অগণিত সরলরেখা টানা যাইতে পারে।

দ্রষ্টব্য। বিন্দুর গতিদ্বারা রেখার উৎপত্তি হয় ইহা বলা হইয়াছে এবং একটি বিন্দু চলিতেছে বলিলে স্বতঃই আমাদের মনে প্রশ্ন আসে বিন্দুটি কোন্ দিকে চলিতেছে। বক্ররেখার অবশ্য কোন নির্দিষ্ট দিক্ নাই কিন্তু সরলরেখার নির্দিষ্ট দিক্ আছে। এইজন্য সরলরেখার আরম্ভ এবং সমাপ্তি নির্দেশ করিবার প্রয়োজন হইলে তীরচিহ্ন দ্বারা উহা সূচিত করা হয়। অক্ষর দ্বারা যখন সরলরেখার নাম করা হয় তখন যথেচ্ছভাবে আমরা একই সরলরেখাকে AB অথবা BA বলিয়া থাকি; কিন্তু উহার আরম্ভ বা সমাপ্তির দিকে বিশেষ অর্থ আরোপিত হইলে অক্ষরের পৌর্বাপর্য পরিবর্তন করা হয়। যেমন AB সরলরেখাটিকে বর্ধিত কর বলিলে আমরা বুঝি উহাকে B-র দিকে বর্ধিত করিতে হইবে, কিন্তু BA-কে বর্ধিত কর বলিলে A-র অভিমুখে বর্ধিত করিতে হইবে এইরূপ বুঝায়।

তল দুই প্রকার—সমতল ও বক্রতল।

সমতল (Plane surface)—যে তলের কোন অংশই একেবারে উচ্চাবচ (উঁচুনীচু) নহে তাহাকে সমতল বলে।

বক্রতল (Curved surface)—যে তলের উপরিভাগ উচ্চাবচ তাহাকে বক্রতল বলে।

কোন তলের যে কোনও স্থানে দুইটি বিন্দু লইয়া একটি সরলরেখা দ্বারা বিন্দু দুইটিকে যোগ করা হইলে সরলরেখাটির সমস্ত অংশ যদি উক্ত তলের সহিত সম্পূর্ণভাবে মিলিত হইয়া যায় অর্থাৎ কোনও স্থানে ফাঁক না থাকে তবে উক্ত তলকে সমতল বলা যায়; আর যদি সরলরেখাটি এবং তলের মধ্যে কোনও ফাঁক থাকিয়া যায়, তবে ঐ তলকে বক্রতল বলা যাইতে পারে।

আয়না ও স্থিরজলের উপরিভাগকে স্থূলভাবে সমতলের উদাহরণ স্বরূপ ধরা যাইতে পারে। একখানি আয়নার উপর একটি পেন্সিল রাখিয়া দেখ উহার নিম্নভাগের সীমান্তটি আয়নার সহিত একেবারেই মিশিয়া যাইবে।

সুতরাং কোন সরলরেখার কিয়দংশ এক সমতলের সহিত সংলগ্ন থাকিলে উহার অবশিষ্টাংশও সেই সমতলে থাকিবে এবং কোন সরলরেখা কোন সমতলকে এক বিন্দুতে ছেদ করিলে অপর কোন বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

কিন্তু বক্রতলের প্রকৃতি অনুসারে এবং বিশিষ্ট অবস্থানে কোন সরলরেখা উহার সহিত সম্পূর্ণভাবে মিলিত হইতে পারে বা নাও হইতে পারে এবং একই সরলরেখা বক্রতলকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে।

ফুটবল, মার্বেল প্রভৃতির উপরিভাগকে বক্রতলের উদাহরণ স্বরূপ ধরা যায়। একটি পেন্সিল ফুটবলের উপর রাখিলে দেখিবে পেন্সিলটির কোন বিশেষ অংশ বলটির পৃষ্ঠের সহিত সংলগ্ন হইয়াছে এবং বাকী অংশ বাহিরে রহিয়া গিয়াছে। ইহাতেই প্রমাণ হইতেছে ফুটবলের উপরিভাগটি বক্রতল।

3. **সমান্তরাল সরলরেখা** (Parallel straight lines)—একই সমতলে অবস্থিত দুই বা ততোধিক সরলরেখা উভয় দিকে যথেচ্ছ বর্ধিত হইলেও যদি পরস্পর মিলিত না হয়, তবে উহাদিগকে **সমান্তরাল সরলরেখা** বলে।

বিভিন্ন সমতলে অবস্থিত দুই বা ততোধিক সরলরেখা উভয় দিকে যথেচ্ছ বর্ধিত হইলেও যদি পরস্পর মিলিত না হয়, তবে তাহাদিগকে সমান্তরাল সরলরেখা বলা যাইতে পারে না। এরূপ সরলরেখা সমূহকে **ভিন্নতলীয়** (Skew) সরলরেখা বলে।

উদাহরণস্বরূপ ঘরের মেঝেতে এবং টেবিলের উপর এক একটি সরলরেখা অঙ্কিত করিলে এবং উহাদিগকে যথেচ্ছ বর্ধিত করিলে উহারা কখনও মিলিত হইতে পারে না। এরূপ সরলরেখাগুলিকে সমান্তরাল বলা হয় না; ইহারা ভিন্নতলীয় সরলরেখা।

4. **সামতলিক জ্যামিতি**—জ্যামিতির যে শাখাতে একই সমতলস্থ বিন্দু, রেখা এবং তদুৎপন্ন ক্ষেত্রাদির বিষয় আলোচিত হয় তাহাকে **সামতলিক জ্যামিতি** (Plane Geometry), **রেখা-গণিত** বা **ক্ষেত্রতত্ত্ব** বলে। একই সমতলস্থ ক্ষেত্রাদির বেধকল্পনা বা তৎসংক্রান্ত আলোচনা অসম্ভব—ইহাতে শুধু দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ এই দুইটি মাত্রাকে ভিত্তি করিয়াই সমস্ত আলোচনা করা হয়। এইজন্য সামতলিক জ্যামিতিকে দ্বিমাত্রিক জ্যামিতিও (Geometry of two Dimensions) বলা হয়।

দ্বিমাত্রক জ্যামিতির আলোচনাই এই গ্রন্থের মুখ্য বিষয়।

অনুশীলনী 1

1. ঘন কাহাকে বলে? কয়েকটি ঘন পদার্থের উদাহরণ দাও এবং প্রত্যেকটির কয়টি তল আছে বল।

2. তল কাহাকে বলে? তল ও ঘন পদার্থে প্রভেদ কি? তলের কয়টি মাত্রা?

3. রেখা কাহাকে বলে? উহার কয়টি মাত্রা? সরলরেখা ও বক্ররেখায় প্রভেদ কি?

4. A-বিন্দু হইতে B-বিন্দু পর্যন্ত একটি সরলরেখা ও পাঁচটি বক্ররেখা আছে; উহাদের মধ্যে কোন্‌টি সর্বাপেক্ষা ছোট?

5. দুইটি সরলরেখা কয়টি বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে?

6. সমতল ও বক্রতলের প্রভেদ দেখাও এবং প্রত্যেকের কয়েকটি করিয়া উদাহরণ দাও।

7. একটি সরলরেখা এবং একটি বক্ররেখা একাধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে কি না চিত্র আঁকিয়া বুঝাইয়া দাও।

8. একটি সরলরেখা কোন বক্রতলকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে কি না বুঝাইয়া দাও।

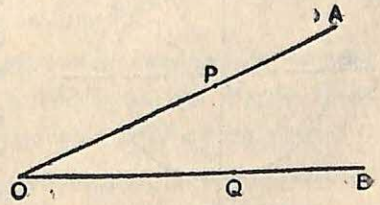
9. একটি সরলরেখা কোন সমতলের সহিত একটি মাত্র বিন্দুতে মিলিত হইলে উভয়ে একই সমতলস্থ হইবে কি না?

10. সমান্তরাল সরলরেখা ও ভিন্নতলীয় সরলরেখার সংজ্ঞা লেখ।

---

5. **কোণ** (Angle)—দুইটি সরলরেখা কোন বিন্দুতে মিলিত হইলে ঐ বিন্দুতে কোণ উৎপন্ন হয়।

যে দুইটি সরলরেখার মিলনে কোণের উৎপত্তি হয় তাহাদের প্রত্যেকটিকে কোণের বাহু বা ভুজ (Arm) বলে এবং যে বিন্দুতে কোণ উৎপন্ন হয় সেই বিন্দুটিকে শীর্ষ বিন্দু বা শীর্ষ (Vertex) বলা হয়।



OA এবং OB দ্বারা উৎপন্ন কোণটিকে AOB অথবা BOA কোণ বলা হয়, অর্থাৎ শীর্ষজ্ঞাপক অক্ষরটিকে সর্বদাই মাঝখানে বসাইতে হয়।

কিন্তু বক্রতলের প্রকৃতি অনুসারে এবং বিশিষ্ট অবস্থানে কোন সরলরেখা উহার সহিত সম্পূর্ণভাবে মিলিত হইতে পারে বা নাও হইতে পারে এবং একই সরলরেখা বক্রতলকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে।

ফুটবল, মার্বেল প্রভৃতির উপরিভাগকে বক্রতলের উদাহরণ স্বরূপ ধরা যায়। একটি পেন্সিল ফুটবলের উপর রাখিলে দেখিবে পেন্সিলটির কোন বিশেষ অংশ বলটির পৃষ্ঠের সহিত সংলগ্ন হইয়াছে এবং বাকী অংশ বাহিরে রহিয়া গিয়াছে। ইহাতেই প্রমাণ হইতেছে ফুটবলের উপরিভাগটি বক্রতল।

3. **সমান্তরাল সরলরেখা** (Parallel straight lines)—একই সমতলে অবস্থিত দুই বা ততোধিক সরলরেখা উভয় দিকে যথেচ্ছ বর্ধিত হইলেও যদি পরস্পর মিলিত না হয়, তবে উহাদিগকে **সমান্তরাল সরলরেখা** বলে।

বিভিন্ন সমতলে অবস্থিত দুই বা ততোধিক সরলরেখা উভয় দিকে যথেচ্ছ বর্ধিত হইলেও যদি পরস্পর মিলিত না হয়, তবে তাহাদিগকে সমান্তরাল সরলরেখা বলা যাইতে পারে না। এরূপ সরলরেখা সমূহকে **ভিন্নতলীয়** (Skew) সরলরেখা বলে।

উদাহরণস্বরূপ ঘরের মেঝেতে এবং টেবিলের উপর এক একটি সরলরেখা অঙ্কিত করিলে এবং উহাদিগকে যথেচ্ছ বর্ধিত করিলে উহারা কখনও মিলিত হইতে পারে না। এরূপ সরলরেখাগুলিকে সমান্তরাল বলা হয় না; ইহারা ভিন্নতলীয় সরলরেখা।

4. **সামতলিক জ্যামিতি**—জ্যামিতির যে শাখাতে একই সমতলস্থ বিন্দু, রেখা এবং তদুৎপন্ন ক্ষেত্রাদির বিষয় আলোচিত হয় তাহাকে **সামতলিক জ্যামিতি** (Plane Geometry), **রেখা-গণিত** বা **ক্ষেত্রতত্ত্ব** বলে। একই সমতলস্থ ক্ষেত্রাদির বেধকল্পনা বা তৎসংক্রান্ত আলোচনা অসম্ভব—ইহাতে শুধু দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ এই দুইটি মাত্রাকে ভিত্তি করিয়াই সমস্ত আলোচনা করা হয়। এইজন্য সামতলিক জ্যামিতিকে **দ্বিমাত্রিক জ্যামিতিও** (Geometry of two Dimensions) বলা হয়।

দ্বিমাত্রক জ্যামিতির আলোচনাই এই গ্রন্থের মুখ্য বিষয়।

অনুশীলনী 1

1. ঘন কাহাকে বলে? কয়েকটি ঘন পদার্থের উদাহরণ দাও এবং প্রত্যেকটির কয়টি তল আছে বল।

2. তল কাহাকে বলে? তল ও ঘন পদার্থে প্রভেদ কি? তলের কয়টি মাত্রা?

3. রেখা কাহাকে বলে? উহার কয়টি মাত্রা? সরলরেখা ও বক্ররেখায় প্রভেদ কি?

4. A-বিন্দু হইতে B-বিন্দু পর্যন্ত একটি সরলরেখা ও পাঁচটি বক্ররেখা আছে; উহাদের মধ্যে কোন্‌টি সর্বাপেক্ষা ছোট?

5. দুইটি সরলরেখা কয়টি বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে?

6. সমতল ও বক্রতলের প্রভেদ দেখাও এবং প্রত্যেকের কয়েকটি করিয়া উদাহরণ দাও।

7. একটি সরলরেখা এবং একটি বক্ররেখা একাধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে কি না চিত্র আঁকিয়া বুঝাইয়া দাও।

8. একটি সরলরেখা কোন বক্রতলকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে কি না বুঝাইয়া দাও।

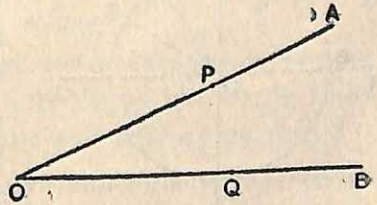
9. একটি সরলরেখা কোন সমতলের সহিত একটি মাত্র বিন্দুতে মিলিত হইলে উভয়ে একই সমতলস্থ হইবে কি না?

10. সমান্তরাল সরলরেখা ও ভিন্নতলীয় সরলরেখার সংজ্ঞা লেখ।

---

5. **কোণ** (Angle)—দুইটি সরলরেখা কোন বিন্দুতে মিলিত হইলে ঐ বিন্দুতে কোণ উৎপন্ন হয়।

যে দুইটি সরলরেখার মিলনে কোণের উৎপত্তি হয় তাহাদের প্রত্যেকটিকে কোণের বাহু বা ভুজ (Arm) বলে এবং যে বিন্দুতে কোণ উৎপন্ন হয় সেই বিন্দুটিকে শীর্ষ বিন্দু বা শীর্ষ (Vertex) বলা হয়।

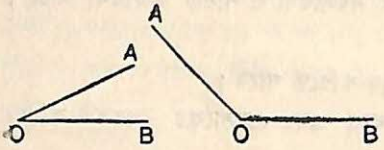


OA এবং OB দ্বারা উৎপন্ন কোণটিকে AOB অথবা BOA কোণ বলা হয়, অর্থাৎ শীর্ষজ্ঞাপক অক্ষরটিকে সর্বদাই মাঝখানে বসাইতে হয়।

কেবল শীর্ষজ্ঞাপক অক্ষরটি দ্বারাও কোণের নাম করা হয়, যেমন O-কোণ।

পূর্ব পৃষ্ঠার চিত্রে AOB এবং POQ প্রকৃতপক্ষে একই কোণ, তবে প্রভেদ এই AOB কোণের বাহু দুইটি POQ কোণের বাহু দুইটি অপেক্ষা দীর্ঘতর। সুতরাং দেখা যাইতেছে যে, বাহুর দৈর্ঘ্যের হ্রাসবৃদ্ধিতে কোণের পরিমাণের কোন হ্রাসবৃদ্ধি হয় না।

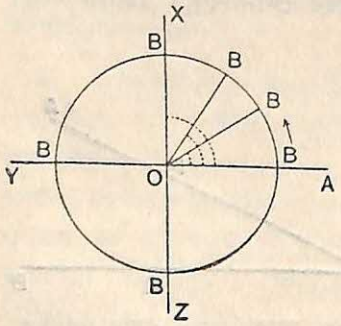
আবার নীচের চিত্রে কোণ দুইটি লক্ষ্য কর। উভয় কোণেরই বাহুদ্বয় পরস্পর সমান, তথাপি দেখা যাইতেছে যে কোণ দুইটি অসমান, অর্থাৎ একটি বড় এবং অপরটি তদপেক্ষা ছোট। সুতরাং বুঝা যাইতেছে যে, কোণের পরিমাণ বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের উপর নির্ভর না করিলেও উহা সম্পূর্ণরূপে বাহুদ্বয়ের পরস্পর দিক্‌সাপেক্ষ, অর্থাৎ দুইটি সরলরেখা পরস্পর কিরূপ দিক্ হইতে আসিয়া মিলিত হইতেছে অথবা একটি সরলরেখা অপর একটি সরলরেখার উপর কি ভাবে নত (inclined) হইয়া মিলিত হইয়াছে ইহার উপরই কোণের হ্রাসবৃদ্ধি নির্ভর করে।



অতএব, কোণের পরিমাণ বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যনিরপেক্ষ, কিন্তু উহাদের পরস্পর অবনতিসাপেক্ষ।

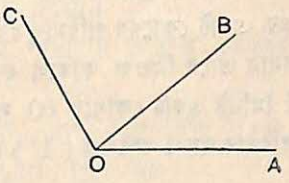
একটি সরলরেখার ঘূর্ণনে কি ভাবে বিভিন্ন কোণের উৎপত্তি হয় তাহার আলোচনা হইতে উল্লিখিত বিষয়গুলি আরও স্পষ্টভাবে প্রতীয়মান হইবে।

ঘূর্ণনক্রিয়া ও কোণের উৎপত্তি—মনে কর AO একটি স্থির সরলরেখা, আর একটি সরলরেখা BO উহার সহিত মিলিত হইয়া আছে। O-বিন্দুটি স্থির রাখিয়া তীর-প্রদর্শিতক্রমে OB সরল রেখাটিকে ঘুরাইতে থাক, তাহা হইলে OB সরলরেখা বিভিন্ন অবস্থানে OA-এর সহিত নানারূপ কোণ উৎপন্ন করিবে। এই ঘূর্ণনের পরিমাণকেই OA, OB দ্বারা উৎপন্ন কোণ বলা হয়। ঘূর্ণনের সঙ্গে সঙ্গে কোণটির হ্রাসবৃদ্ধি হয় বলিয়া AOB কোণটি দ্বারা OB সরলরেখার ঘূর্ণনের পরিমাণ সূচিত হইয়া থাকে।



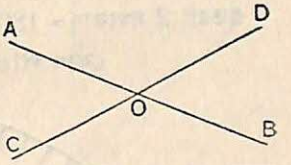
এস্থলে স্পষ্ট বুঝা যাইতেছে যে AOB কোণটির পরিমাণ OB সরলরেখার একমাত্র ঘূর্ণনের মাত্রার উপর নির্ভর করে, উহার দৈর্ঘ্যের উপর মোটেই নির্ভর করে না।

সন্নিহিত-কোণ (Adjacent angles)—দুইটি কোণের একই শীর্ষবিন্দু ও একটি সাধারণ বাহু থাকিলে এবং উক্ত কোণ দুইটি সাধারণ বাহুর বিপরীত দিকে অবস্থিত হইলে, উহাদিগকে সন্নিহিত কোণ বলে।



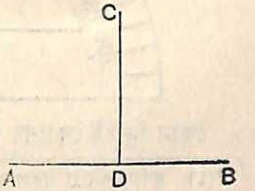
AOB, BOC দুইটি সন্নিহিত কোণ ; উভয় কোণের শীর্ষবিন্দু O, সাধারণ বাহু OB এবং উক্ত কোণ দুইটি OB বাহুর বিপরীত দিকে অবস্থিত।

বিপ্রতীপ কোণ (Vertically opposite angles)—দুইটি সরলরেখা কোন বিন্দুতে ছেদ করিলে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের দুই দুইটি বিপরীত কোণকে বিপ্রতীপ কোণ বলে।



AOD, COB বিপ্রতীপ কোণ, এবং AOC, BOD এই দুইটিও বিপ্রতীপ কোণ।

সমকোণ (Right angle)—একটি সরলরেখা আর একটি সরলরেখার উপর দণ্ডায়মান হইয়া যে দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন করে তাহারা পরস্পর সমান হইলে ঐ সন্নিহিত কোণ দুইটির প্রত্যেকটিকে সমকোণ বলে এবং ঐ সরলরেখা দুইটির একটিকে অপরটির উপর লম্ব (Perpendicular) বলা হয়।



ADC, BDC কোণ দুইটির প্রত্যেকটিই সমকোণ, এবং CD, AB-র উপর এবং AB, CD-র উপর লম্ব।

কোণের এককঃ—যে কোন জিনিসের পরিমাণ স্থির করিবার জন্য নির্দিষ্ট এককের (unit) প্রয়োজন। যেমন দৈর্ঘ্য মাপিবার জন্য সেন্টিমিটার, মিটার, কিলোমিটার ইত্যাদি অথবা ইঞ্চি, ফুট, গজ ইত্যাদি বিভিন্ন একক ব্যবহার করা হয়, সেইরূপ কোণ মাপিবার জন্যও নির্দিষ্ট এককের প্রয়োজন।

ঘূর্ণনপ্রক্রিয়ার চিত্রে (পৃ. 10) OB সরলরেখাটি OX সরলরেখার অবস্থানে আসিয়া OA সরলরেখার সহিত এক সমকোণ, OY সরলরেখার অবস্থানে আসিয়া দুই সমকোণ বা এক সরলকোণ, OZ সরলরেখার অবস্থানে আসিয়া

তিন সমকোণ এবং OA সরলরেখার সহিত পুনর্মিলিত হইয়া অর্থাৎ এক পূর্ণ আবর্তনে চারি সমকোণ উৎপন্ন করে।

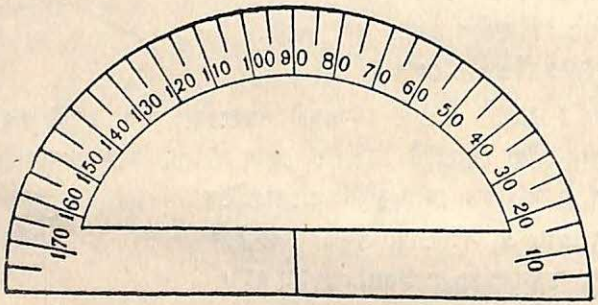
এক সমকোণকেই সাধারণতঃ কোণের একক বলিয়া ধরা হয়।*

কোণের সূক্ষ্মবিভাগ—একটি সমকোণকে 90 সমান ভাগে বিভক্ত করিলে এক একটি কোণের পরিমাণ হয় 1 ডিগ্রী (1°); 1 ডিগ্রী একটি কোণকে 60 সমান ভাগে বিভক্ত করিলে এক একটি কোণের পরিমাণ হয় 1 মিনিট (1′) এবং 1 মিনিট একটি কোণকে 60 সমান ভাগে বিভক্ত করিলে এক একটি কোণের পরিমাণ হয় 1 সেকেণ্ড (1″)।

1 সমকোণ = 90 ডিগ্রী
1 ডিগ্রী = 60 মিনিট
1 মিনিট = 60 সেকেণ্ড

সুতরাং 2 সমকোণ = 180°, 3 সমকোণ = 270°, 4 সমকোণ = 360°।

কোণ পরিমাণ ও অঙ্কন—চাঁদার ব্যবহার



কোন নির্দিষ্ট কোণের পরিমাণ নির্ণয় করিবার জন্য এবং নির্দিষ্ট পরিমাণের

*(1) ঘূর্ণ্যমান OB সরলরেখাটি একবার পূর্ণ আবর্তনে চারি সমকোণ উৎপন্ন করে, সুতরাং উহা পুনরায় ঘুরিলে চারি সমকোণ অপেক্ষা আরও বৃহত্তর কোণ উৎপন্ন করিবে। এইরূপ কোণ বর্তমান গ্রন্থের আলোচ্য বিষয় নহে।

(2) যে দিক্ দিয়া OB সরলরেখাকে O-বিন্দুর চতুর্দিকে আবর্তন করিতে দেখান হইয়াছে উহার বিপরীত দিক্ দিয়াও OB সরলরেখা O-বিন্দুকে আবর্তন করিতে পারে। প্রথমোক্ত ঘূর্ণনে যে কোণ উৎপন্ন হয় তাহাকে যদি ধনাত্মক (Positive) বলিয়া ধরা হয়, তবে শেষোক্ত কোণকে ঋণাত্মক (Negative) ধরা যাইতে পারে। (চিত্র—10 পৃঃ)

† ঘূর্ণনের পূর্বে OB সরলরেখা OA সরলরেখার সহিত মিলিত থাকিয়া যে কোণ উৎপন্ন করে তাহার পরিমাণ শূন্য ডিগ্রী 0°, ইহা একটি কাল্পনিক কোণ ছাড়া আর কিছুই নহে।

(চিত্র—10 পৃঃ)

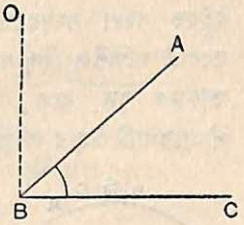
কোণ অঙ্কন করিবার জন্য একটি যন্ত্র ব্যবহৃত হয়, উহাকে চাঁদা বা কোণচক্র (Protractor) বলে।

মন্তব্য। ছাত্রগণ পূর্ব শ্রেণীতেই চাঁদার ব্যবহার শিক্ষা করিয়া থাকে। পুনরাবৃত্তির জন্য শিক্ষক মহাশয় আর একবার বুঝাইয়া দিবেন।

প্রশ্ন 1. খাতায় দশটি কোণ আঁকিয়া চাঁদার সাহায্যে প্রত্যেক কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

2. চাঁদার সাহায্যে আঁক—15°, 30°, 45°, 90°, 21°, 37°, 151° 50°-30′, 100°-30′, 150°-30′.

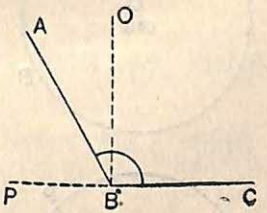
সূক্ষ্মকোণ (Acute angle)—যে কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, তাহাকে সূক্ষ্মকোণ বলে।



ঘূর্ণন প্রক্রিয়ায় AB সরলরেখা BC সরলরেখার অবস্থান হইতে আরম্ভ করিয়া BO সরলরেখার অবস্থানে না আসা পর্যন্ত যত কোণ উৎপন্ন করিবে তাহাদের প্রত্যেকটিই সূক্ষ্মকোণ।

সূক্ষ্মকোণ 90° ডিগ্রী অপেক্ষা কম।

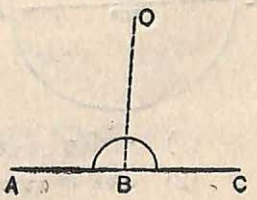
স্থূলকোণ (Obtuse angle)—যে কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর তাহাকে স্থূলকোণ বলে।



AB সরলরেখা BC সরলরেখার অবস্থান হইতে আরম্ভ করিয়া BO অবস্থান অতিক্রম করিয়া BP অবস্থানে না আসা পর্যন্ত যত কোণ উৎপন্ন করিবে তাহাদের প্রত্যেকটিই স্থূলকোণ।

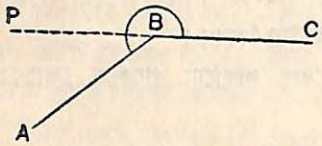
স্থূলকোণ 90° ডিগ্রীর বেশী কিন্তু 180° ডিগ্রীর কম।

সরলকোণ (Straight angle)—যে কোণ দুই সমকোণের সমান তাহাকে সরলকোণ বলে।



AB সরলরেখা BC-র বিপরীত দিকে আসিয়া উহার সহিত এক সরলরেখায় অবস্থিত হইলে সরলকোণ উৎপন্ন হয়। সরলকোণ 180°।

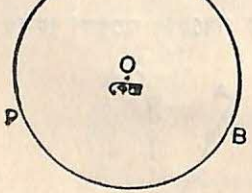
প্রবৃদ্ধকোণ (Reflex or Re-entrant angle)—যে কোণ দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর, কিন্তু চারি সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর তাহাকে প্রবৃদ্ধ বা প্রত্যাবর্তী কোণ বলে।



ঘূর্ণ্যমান AB সরলরেখাটি BC সরলরেখার অবস্থান হইতে আরম্ভ করিয়া দুই সমকোণ অর্থাৎ BP অবস্থান অতিক্রম করিয়া BC অবস্থানে পুনর্মিলিত না হওয়া পর্যন্ত উৎপন্ন সমস্ত কোণই প্রবৃদ্ধ কোণ।

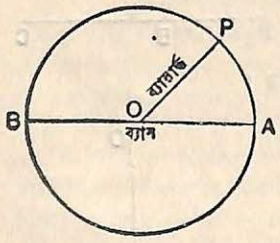
প্রবৃদ্ধ কোণ 180° ডিগ্রী অপেক্ষা বেশী কিন্তু 360° ডিগ্রী অপেক্ষা কম।

6. বৃত্ত (Circle)—কোন সমতলের উপরিস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সর্বদা সমদূরবর্তী হইয়া যদি অপর একটি বিন্দু সম্পূর্ণভাবে ঘুরিয়া আসে তবে ঐ গতিশীল বিন্দু দ্বারা উৎপন্ন বক্ররেখাটি সমতলের যে অংশ সীমাবদ্ধ করে তাহাকে বৃত্ত বলে; স্থির বিন্দুটি বৃত্তের কেন্দ্র (Centre) এবং বৃত্তের সীমারেখাটি উহার পরিধি (Circumference), সুতরাং—



যে বক্ররেখা বৃত্তকে সীমাবদ্ধ করে তাহাকে বৃত্তের পরিধি বলে। FAB বক্ররেখাটি পরিধি।

বৃত্তের মধ্যস্থিত যে নির্দিষ্ট বিন্দুটি বৃত্তপরিধি হইতে সমদূরবর্তী তাহাকে বৃত্তের কেন্দ্র বলে। O বিন্দুটি কেন্দ্র।



যে সরলরেখা বৃত্তের কেন্দ্র ভেদ করিয়া উভয় পার্শ্বে পরিধি পর্যন্ত বিস্তৃত তাহাকে ব্যাস (Diameter) বলে। BA সরলরেখাটি ব্যাস। বৃত্তের কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্যন্ত বিস্তৃত সরলরেখাকে ব্যাসার্ধ (Radius) বলে। OA, OP OB ইহাদের প্রত্যেকটিই এক একটি ব্যাসার্ধ।

উক্ত বৃত্তবিষয়ক আলোচনা হইতে স্পষ্টই বুঝা যাইতেছে যে,

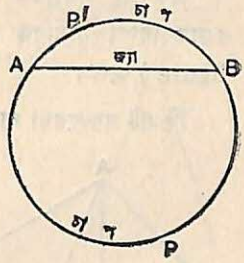
(1) পরিধিস্থ যে কোন বিন্দুই কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

(2) একই বা সমান সমান বৃত্তের সমস্ত ব্যাসার্ধই সমান।

(3) ব্যাস ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ ; সুতরাং একই বা সমান সমান বৃত্তের সমস্ত ব্যাসই সমান।

গতিশীল রেখাদ্বারা তল উৎপন্ন হয়—ইহা পূর্বে আলোচিত হইয়াছে। ইহাকে ভিত্তি করিয়া বৃত্তের আর একটি সংজ্ঞা দেওয়া যাইতে পারে :

কোন সীমাবদ্ধ সরলরেখা এক প্রান্তবিন্দুকে স্থির রাখিয়া সমভাবে একবার ঘুরিয়া আসিলে যে সমতল ক্ষেত্রটি উৎপন্ন হয় তাহাকে বৃত্ত বলে।



অর্ধবৃত্ত (Semi-circle)—ব্যাস ও ব্যাস দ্বারা ছিন্ন পরিধির অংশ দ্বারা সীমাবদ্ধ বৃত্তের অংশকে অর্ধবৃত্ত বা সামিবৃত্ত বলে।

ব্যাস বৃত্তকে সমান দুই ভাগে বিভক্ত করে এবং পরিধিকেও সমান দুই ভাগে বিভক্ত করে, সুতরাং অর্ধবৃত্ত, ব্যাস ও অর্ধপরিধি দ্বারা সীমাবদ্ধ। 14 পৃষ্ঠার নিম্নের চিত্রে APB ক্ষেত্রটি অর্ধবৃত্ত।

পরিধির যে কোন অংশকে ধনু বা চাপ (Arc) বলে।

পরিধির অংশ APB এবং AP'B-এর প্রত্যেকটিই এক একটি চাপ।

যে সরলরেখা পরিধির দুইটি বিন্দু যোগ করে তাহাকে জ্যা (Chord) বলে। AB সরলরেখাটি একটি জ্যা। কেন্দ্রগামী জ্যা-টি ব্যাস।

অনুশীলনী 2

1. 4 সে. মি. ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক এবং উহাতে কেন্দ্র, পরিধি, ব্যাস ও ব্যাসার্ধ চিহ্নিত কর।

2. যে কোন একটি বৃত্ত আঁকিয়া উহাতে পাঁচটি ব্যাসার্ধ আঁক। মাপিয়া দেখ সমস্ত ব্যাসার্ধ সমান কি না।

3. অর্ধবৃত্ত ও ধনুর সংজ্ঞা লেখ এবং চিত্র অঙ্কিত কর।

---

7. সামতলিক ক্ষেত্র—ঋজুরেখ ক্ষেত্র (ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ ও বহুভুজ)।

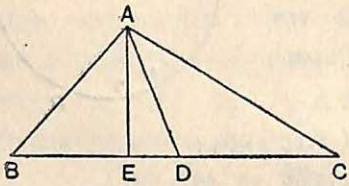
যদি সমতলের কোন অংশ এক বা একাধিক রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ হয়, তাহা হইলে ঐ সীমাবদ্ধ অংশকে সামতলিক ক্ষেত্র (Plane figure) বলে

সামতলিক ক্ষেত্রের সীমারেখার দৈর্ঘ্যসমষ্টিকে উহার **পরিসীমা** (Perimeter) বলে এবং পরিসীমার মধ্যবর্তী স্থান-পরিমাণকে উহার ক্ষেত্রফল বা **কালি** (Area) বলে।

কেবল সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ সামতলিক ক্ষেত্রকে ঋজুরেখ ক্ষেত্র (Rectilineal figure) বলে।

এক বা একাধিক বক্ররেখাদ্বারা অথবা আংশিক সরলরেখা ও আংশিক বক্ররেখাদ্বারা সীমাবদ্ধ সামতলিক ক্ষেত্রকে বক্ররেখ ক্ষেত্র (Curvilineal figure) বলে।

তিনটি সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ সামতলিক ক্ষেত্রকে ত্রিভুজ (Triangle) বলে। ইহার তিনটি কোণ বলিয়া ইহাকে ত্রিকোণও বলা হয়। ABC একটি ত্রিভুজ।



যে তিনটি সরলরেখা দ্বারা ত্রিভুজ সীমাবদ্ধ উহাদের প্রত্যেকটিকে ত্রিভুজের বাহু বা ভুজ (Side) বলে। AB, BC, CA, ABC ত্রিভুজের তিনটি বাহু। AB + BC + CA অর্থাৎ ত্রিভুজের তিনবাহুর সমষ্টিকে উহার পরিসীমা বলে।

ত্রিভুজের কোণের বিন্দুগুলিকে কৌণিক বিন্দু (Angular points) বলে, এবং যে কোন একটি কৌণিক বিন্দুকে শীর্ষ বিন্দু বা শীর্ষ (Vertex) ধরা হইলে উহার বিপরীত বাহুকে ভূমি (Base) বলা হয়।

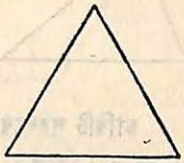
ABC ত্রিভুজের, A, B ও C তিনটি কৌণিক বিন্দু, A শীর্ষ এবং BC ভূমি।

ত্রিভুজের শীর্ষস্থ কোণকে শিরঃকোণ (Vertical angle) বলে, এবং ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়কে ভৌমিক কোণ (Base angles) বলা হয়। BAC শিরঃকোণ এবং ABC ও ACB-এর প্রত্যেকটি ভৌমিক কোণ।

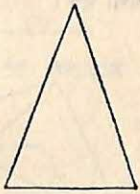
ত্রিভুজের যে কোন কৌণিক বিন্দু হইতে উহার বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখাকে ত্রিভুজের মধ্যমা (Median) বলে। ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমা।

শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপরে অঙ্কিত লম্বকে ত্রিভুজের উচ্চতা বা উন্নতি (Altitude) বলে। AE, ABC ত্রিভুজের উন্নতি।

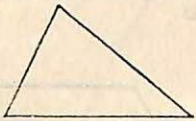
বাহুর দৈর্ঘ্যভেদে ত্রিভুজ তিন প্রকার—সম, দ্বিসম ও বিষম।



যে ত্রিভুজের তিনটি বাহু সমান তাহাকে **সমত্রিভুজ** বা **সমবাহু ত্রিভুজ** (Equilateral triangle) বলে।



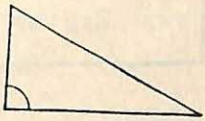
যে ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান তাহাকে **দ্বিসম** বা **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ** (Isosceles triangle) বলে।



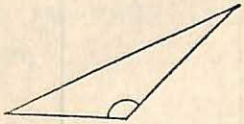
যে ত্রিভুজের তিনটি বাহুই পরস্পর অসমান তাহাকে **বিষম ত্রিভুজ** বা **বিষমবাহু ত্রিভুজ** (Scalene triangle) বলে।

কোণের পরিমাণ ভেদেও ত্রিভুজ তিন প্রকার—**সমকোণী**, **স্থূলকোণী** ও **সূক্ষ্মকোণী**।

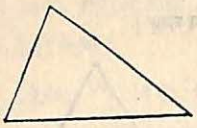
যে ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ তাহাকে **সমকোণী ত্রিভুজ** (Right-angled triangle) বলে।



সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের বিপরীত বাহুকে **অতিভুজ** (Hypotenuse) বলে।

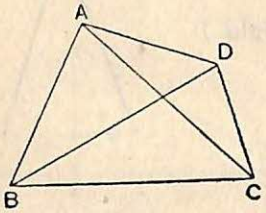


যে ত্রিভুজের একটি কোণ স্থূলকোণ তাহাকে **স্থূলকোণী ত্রিভুজ** (Obtuse-angled triangle) বলে।



যে ত্রিভুজের তিনটি কোণই সূক্ষ্মকোণ তাহাকে **সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ** (Acute-angled triangle) বলে।

চারিটি সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ সামতলিক ক্ষেত্রকে **চতুর্ভুজ** (Quadrilateral) বলে। ইহার চারিটি কোণ আছে বলিয়া ইহাকে **চতুষ্কোণও** বলা হয়।

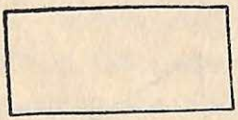


চতুর্ভুজের বিপরীত কৌণিক বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে উহার **কর্ণ** (Diagonal) বলে।

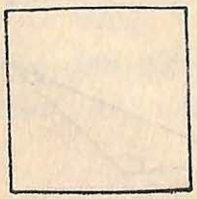
AC, BD-র প্রত্যেকটিই ABCD চতুর্ভুজের কর্ণ।

যে চতুর্ভুজের দুই দুইটি বিপরীত বাহু পরস্পর সমান্তরাল তাহাকে **সামান্তরিক** (Parallelogram) বলে।

[সামান্তরিকের বিপরীত বাহু ও কোণগুলি পরস্পর সমান।]



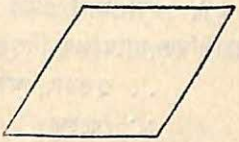
সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হইলে তাহাকে **আয়তক্ষেত্র** (Rectangle) বলে।
[আয়তক্ষেত্রের চারিটি কোণই সমকোণ।]



আয়তক্ষেত্রের সন্নিহিত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান হইলে তাহাকে **বর্গক্ষেত্র** (Square) বলে।

[বর্গক্ষেত্রের চারিটি বাহুই পরস্পর সমান এবং চারিটি কোণই সমকোণ।]

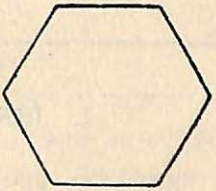
যে চতুর্ভুজের বাহুগুলি পরস্পর সমান কিন্তু একটি কোণও সমকোণ নহে তাহাকে রম্বস বা বিষমকোণী সমচতুর্ভুজ (Rhombus) বলে।



যে চতুর্ভুজের দুইটি মাত্র বাহু পরস্পর সমান্তরাল তাহাকে ট্রাপিজিয়ম বা দ্বিসমান্তর চতুর্ভুজ (Trapezium) বলে।

চারিটির অধিক সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ সামতলিক ক্ষেত্রকে বহুভুজ (Polygon) বলে।

বহুভুজের বাহু ও কোণগুলি পরস্পর সমান হইলে তাহাকে সুষম বহুভুজ (Regular Polygon) বলে।



বাহুর সংখ্যানুসারে বহুভুজের বিভিন্ন নাম দেওয়া হয়, যথা—পঞ্চভুজ (Pentagon), ষড়্ভুজ (Hexagon), সপ্তভুজ (Heptagon), অষ্টভুজ (Octagon), নবভুজ (Nonagon), দশভুজ (Decagon), একাদশ ভুজ (Hendecagon), দ্বাদশ ভুজ (Dodecagon), পঞ্চদশ ভুজ (Quindecagon), ইত্যাদি।

8. ত্রিভুজের সর্বসমতা।

প্রত্যেক ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ—তিনটি বাহু এবং তিনটি কোণ।

একটি ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গের সমান হইলে, ত্রিভুজ দুইটিকে সর্বসম (Congruent, identically equal or equal in all respects) বলা হয়।

দুইটি সর্বসম ত্রিভুজের সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুদুইটিকে অনুরূপ বাহু (Corresponding sides) এবং সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণ দুইটিকে অনুরূপ কোণ (Corresponding angles) বলে।

বলে

9. **সাঙ্কেতিক চিহ্ন**—ভাষার সংক্ষেপ করিবার জন্য জ্যামিতিতে নিম্নলিখিত সাঙ্কেতিক চিহ্নগুলি ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

∴ সুতরাং, অতএব	△ ত্রিভুজ
∵ যেহেতু	⊥ লম্ব
= সমান	∥ সমান্তরাল
≡ সর্বসম	⊙ বৃত্ত
∠ কোণ	O পরিধি
সম∠ সমকোণ	> বৃহত্তর
∠ABC বা ABC কোণ	< ক্ষুদ্রতর

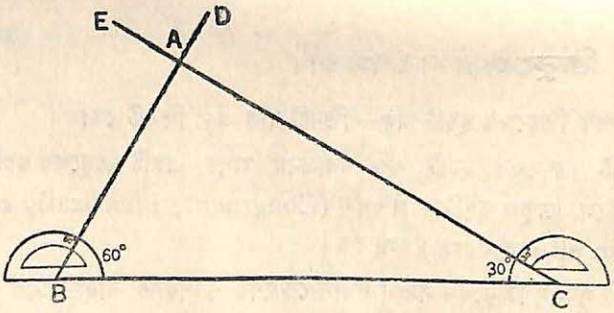
দ্বিতীয় অধ্যায়

পরীক্ষা মূলক প্রাথমিক তথ্য

1. ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ ও বহুভুজের কোণ-সমষ্টি নির্ণয়

ত্রিভুজের কোণ-সমষ্টি নির্ণয়।

(1) 6·3 সে. মি. দীর্ঘ BC সরলরেখা লও। B বিন্দুতে BC-র সহিত 60° পরিমিত CBD কোণ আঁক। C বিন্দুতে BC-র সহিত 30° পরিমিত BCE কোণ

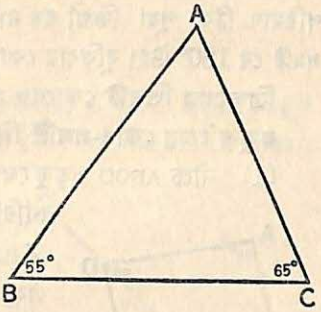


এইরূপে আঁক যেন CE বাহু BD বাহুকে A বিন্দুতে ছেদ করে। এখন ABC একটি ত্রিভুজ হইল।

এই ত্রিভুজের BAC কোণের পরিমাণ কত ডিগ্রী ?—চাঁদার সাহায্যে মাপিয়া দেখ BAC কোণের পরিমাণ 90°। এখন ABC ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি কত হইল ?

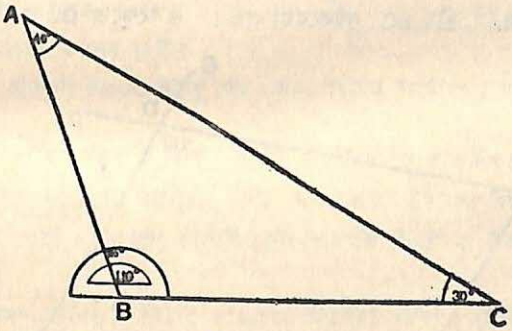
$\angle ABC + \angle BCA + \angle BAC = 60° + 30° + 90° = 180° = 2$ সমকোণ।

(2) যে কোন একটি সরলরেখা BC টান। উহার B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে 55° ও 65° পরিমিত দুইটি কোণ এরূপে আঁক যেন উহাদের BC ভিন্ন অপর বাহু দুইটি পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে।



এখন BAC কোণের পরিমাণ কত ডিগ্রী চাঁদা দ্বারা নির্ণয় কর। মাপিয়া দেখ $\angle BAC = 60°$। তাহা হইলে এই ABC ত্রিভুজেরও তিনটি কোণের সমষ্টি $= 55° + 65° + 60° = 180° = 2$ সমকোণ।

(3) BC একটি সরলরেখা লও। B বিন্দুতে ও C বিন্দুতে BC-র সহিত যথাক্রমে 110° ও 30° পরিমিত দুইটি কোণ এইরূপে আঁক যেন উহাদের BC



ভিন্ন অপর বাহুদ্বয় পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে। এখন ABC ত্রিভুজের BAC কোণের পরিমাণ কত ডিগ্রী চাঁদার সাহায্যে নির্ণয় কর। মাপিয়া দেখ BAC কোণ 40° হইয়াছে।

এই ত্রিভুজেও তিনটি কোণের সমষ্টি $= 110° + 30° + 40° = 180° =$ 2 সমকোণ।

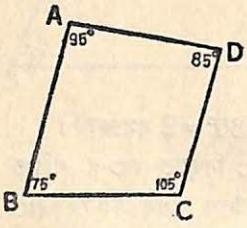
বিভিন্ন ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া উহাদের প্রত্যেকটির তিনটি কোণের পরিমাণ চাঁদার সাহায্যে মাপিয়া নির্ণয় কর এবং উহাদের সমষ্টি নির্ণয় কর। দেখিবে প্রতিক্ষেত্রেই তিনটি কোণের সমষ্টি 180° বা 2 সমকোণের সমান।

অনেক সময় কোণগুলি চাঁদার সাহায্যে মাপিয়া দেখা যাইবে যে উহাদের পরিমাণ ঠিক পুরা ডিগ্রী হয় না, সামান্য কিছু কম বা বেশী হয়; কিন্তু উহাদের সমষ্টি যে 180° উহা বুঝিবার কোনই অসুবিধা হয় না। সুতরাং স্মরণ রাখিবে:

ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি = 180° = 2 সমকোণ।

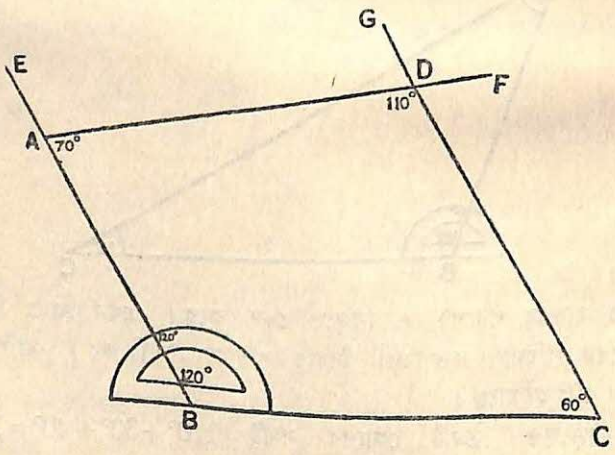
চতুর্ভুজের কোণ-সমষ্টি নির্ণয়।

(1) নীচে ABCD চতুর্ভুজের চিত্র রহিয়াছে। চাঁদা দ্বারা মাপিয়া উহার চারিটি কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর। দেখ $\angle BAD = 95°$, $\angle ABC = 75°$, $\angle BCD = 105°$ এবং $\angle CDA = 85°$.



ABCD চতুর্ভুজের চারিটি কোণের সমষ্টি
$= 95° + 75° + 105° + 85°.$
$= 360° = 4$ সমকোণ।

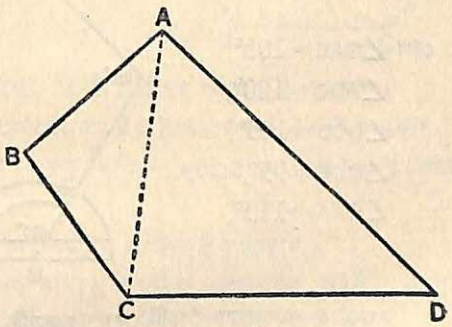
(2) 5 সে.মি. দীর্ঘ BC সরলরেখা লও। B বিন্দুতে BC-র সহিত 120° পরিমিত CBE কোণ আঁক। BE হইতে 3·8 সে.মি. দীর্ঘ BA অংশ কাটিয়া লও।



A বিন্দুতে BA-র সহিত 70° পরিমিত BAF কোণ আঁক। C-বিন্দুতে BC-র সহিত 60° পরিমিত BCG কোণ আঁক। CG যেন AF-কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

ABCD চতুর্ভুজ হইল। মাপিয়া দেখ এই চতুর্ভুজের ADC কোণের পরিমাণ 110° হইল। এখন ABCD চতুর্ভুজের চারিটি কোণের সমষ্টি = 120° + 70° + 60° + 110° = 360° = 4 সমকোণ।

(3) ABCD চতুর্ভুজের AC কর্ণ যোগ করিলে ABC ও ADC দুইটি ত্রিভুজ হয়। আমরা জানি প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি কোণ = 2 সমকোণ। সুতরাং ABC ও ADC ত্রিভুজ দুইটির প্রত্যেকের তিনটি কোণের সমষ্টি = 2 সমকোণ। ABC, ADC ত্রিভুজ দুইটির ছয়টি কোণের সমষ্টি = 2 সমকোণ + 2 সমকোণ = 4 সমকোণ। ABC ও ADC ত্রিভুজ দুইটির ছয়টি কোণ একত্র করিলে ABCD চতুর্ভুজের চারিটি কোণের সমষ্টির সমান হয়। সুতরাং ABCD চতুর্ভুজের কোণ সমূহের সমষ্টি = 4 সমকোণ।



বিভিন্ন প্রকারের চতুর্ভুজ অঙ্কিত করিয়া উহাদের প্রত্যেকটির চারিটি কোণের পরিমাণ চাঁদার সাহায্যে মাপিয়া নির্ণয় কর এবং উহাদের সমষ্টি নির্ণয় কর। দেখিবে প্রতিক্ষেত্রেই চতুর্ভুজের চারিটি কোণের সমষ্টি 360° বা 4 সমকোণ।

অনেক সময় কোণগুলি চাঁদার সাহায্যে মাপিয়া দেখা যাইবে যে উহাদের পরিমাণ পুরা ডিগ্রী হয় না, সামান্য কিছু কম বা বেশী হয়; কিন্তু উহাদের চারিটির সমষ্টি যে 360° বা 4 সমকোণ হইবে ইহা বুঝিবার কোনই অসুবিধা হইবে না। সুতরাং স্মরণ রাখিবে—

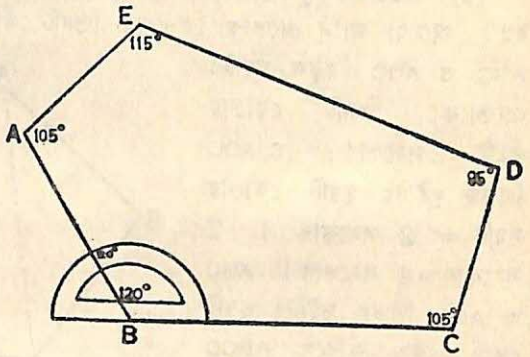
চতুর্ভুজের চারিটি কোণের সমষ্টি = 360° = 4 সমকোণ।

বহুভুজের কোণ-সমষ্টি নির্ণয়।

(1) প্রথমতঃ ধরা যাউক পঞ্চভুজ বা পাঁচটি বাহু বিশিষ্ট বহুভুজের কোণ সমূহের সমষ্টি নির্ণয় করিতে হইবে।

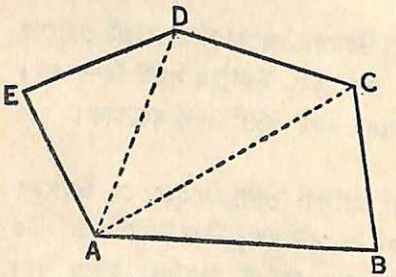
যে কোন একটি পঞ্চভুজ অঙ্কিত করিয়া উহার কোণ পাঁচটির পরিমাণ চাঁদার সাহায্যে নির্ণয় কর। অতঃপর কোণ পাঁচটির সমষ্টি নির্ণয় কর। দেখিবে, কোণ পাঁচটির সমষ্টি $=540°=6$ সমকোণ।

(2) নীচে ABCDE পঞ্চভুজের চিত্র রহিয়াছে। চাঁদাদ্বারা মাপিয়া উহার কোণ পাঁচটির পরিমাণ নির্ণয় কর।



দেখ $\angle BAE = 105°$,
$\angle ABC = 120°$,
$\angle BCD = 105°$,
$\angle CDE = 95°$,
$\angle DEA = 115°$,

ABCDE পঞ্চভুজের পাঁচটি কোণের সমষ্টি
$= 105° + 120° + 105° + 95° + 115° = 540° = 6$ সমকোণ।



ABCDE পঞ্চভুজের AC, AD কর্ণ দুইটি যোগ করিয়া ABC; ACD, ADE তিনটি ত্রিভুজ হইল।

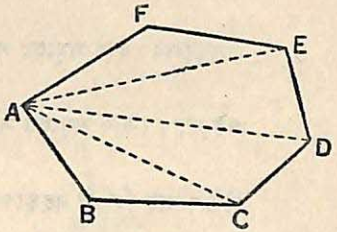
আমরা জানি প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি $=2$ সমকোণ।

সুতরাং ABC, ACD, ADE ত্রিভুজ তিনটির প্রত্যেকের তিনটি কোণের সমষ্টি $=2$ সমকোণ।

$\therefore$ ABC, ACD, ADE ত্রিভুজ তিনটির সমস্ত কোণের সমষ্টি $=2$ সমকোণ $\times 3 = 6$ সমকোণ।

ABC, ACD, ADE ত্রিভুজ তিনটির সমস্ত কোণ একত্র করিলে ABCDE পঞ্চভুজের সমস্ত কোণের সমষ্টির সমান হয়। সুতরাং ABCDE পঞ্চভুজের কোণ সমূহের সমষ্টি = 6 সমকোণ।

(3) ABCDEF একটি ষড়্ভুজের অর্থাৎ ছয় বাহু বিশিষ্ট বহুভুজের চিত্র রহিয়াছে।



ইহার AC, AD, AE কর্ণ তিনটি যোগ করিলে ABC, ACD, ADE, AEF চারিটি ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়। আমরা জানি প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি = 2 সমকোণ।

এখন, ত্রিভুজ চারিটির প্রত্যেকের তিনটি কোণের সমষ্টি = 2 সমকোণ।

∴ ত্রিভুজ চারিটির সমস্ত কোণের সমষ্টি = 2 সমকোণ × 4 = 8 সমকোণ।

ত্রিভুজ চারিটির সমস্ত কোণ একত্র করিলে ABCDEF ষড়্ভুজের সমস্ত কোণের সমষ্টির সমান হয়।

∴ ABCDEF ষড়্ভুজের কোণ সমূহের সমষ্টি = 8 সমকোণ।

বিভিন্ন প্রকারের ষড়্ভুজ অঙ্কিত করিয়া, উহাদের প্রত্যেকের ছয়টি কোণের পরিমাণ চাঁদার সাহায্যে মাপিয়া নির্ণয় কর এবং উহাদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

দেখিবে প্রতিক্ষেত্রেই ষড়্ভুজের বা ছয় বাহু বিশিষ্ট বহুভুজের কোণ সমূহের সমষ্টি = 8 সমকোণ।

বহুভুজের বাহুসংখ্যা যতই হউক না কেন চাঁদার সাহায্যে সমস্ত কোণের পরিমাণ নির্ণয় করিয়া উহার সমষ্টি নির্ণয় করা যায়।

ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি = 2 সমকোণ, ইহা ধরিয়া লইলে, হিসাব করিয়াও যে কোন বহুভুজের কোণ সমূহের সমষ্টি নির্ণয় করা যায়। বহুভুজের যে কোন কৌণিক বিন্দু দিয়া কর্ণ টানিয়া বহুভুজকে কতিপয় সংখ্যক ত্রিভুজে বিভক্ত করিলে, ত্রিভুজের সংখ্যা যত হইবে, বহুভুজের কোণ সমূহের সমষ্টি তাহার দ্বিগুণ সংখ্যক সমকোণের সমান হইবে। স্মরণ রাখিবে উক্তরূপে বহুভুজকে ত্রিভুজে বিভক্ত করিলে ত্রিভুজের সংখ্যা হইবে বহুভুজের বাহুসংখ্যা অপেক্ষা দুই কম।

অতএব স্মরণ রাখিবে—

ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করা হইলে (i) বহিঃকোণ বিপরীত অন্তঃকোণ দুইটির সমষ্টির সমান হইবে এবং (ii) বহিঃকোণ, বিপরীত অন্তঃকোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

অনুশীলনী 4

1. কয়েকটি ত্রিভুজ আঁক এবং প্রত্যেকের একটি করিয়া বাহু বর্ধিত কর। মাপিয়া দেখাও যে প্রত্যেক বহিঃকোণ উহার বিপরীত অন্তঃকোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

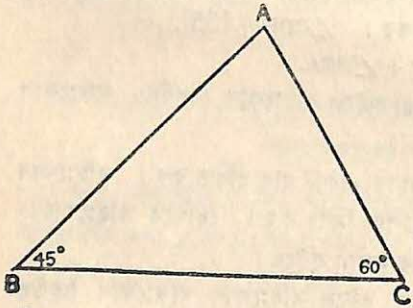
2. চারিটি বিভিন্ন প্রকারের ত্রিভুজ আঁকিয়া উহাদের প্রত্যেকের একটি করিয়া বাহু বর্ধিত কর। মাপিয়া দেখাও যে প্রত্যেক বহিঃকোণ উহার বিপরীত অন্তঃকোণ দুইটির সমষ্টির সমান।

3. একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া উহার বাহু তিনটি একই ক্রমে বর্ধিত কর। মাপিয়া দেখাও যে বহিঃকোণ তিনটির সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।

---

3. ত্রিভুজের বাহু ও কোণের পারস্পর সম্বন্ধ

(1) ABC ত্রিভুজের AB বাহু AC বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর আছে মাপিয়া দেখ। AB বাহুর বিপরীত কোণ ACB-র পরিমাণ মাপিয়া নির্ণয় কর। $\angle ACB$ এর পরিমাণ $60°$। AC বাহুর বিপরীত কোণ ABC-র পরিমাণ মাপিয়া নির্ণয় কর। $\angle ABC$-র পরিমাণ $45°$; কিন্তু $45°$ অপেক্ষা $60°$ বৃহত্তর।



অর্থাৎ $\angle ACB$, $\angle ABC$ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

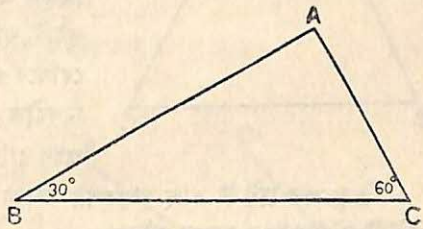
আবার মাপিয়া দেখ ABC ত্রিভুজের BC বাহু AB বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। BC বাহুর বিপরীত কোণ BAC-র পরিমাণ মাপিয়া দেখা গেল $75°$; AB বাহুর বিপরীত কোণ মাপিয়া দেখা গেল $60°$; কিন্তু $60°$ অপেক্ষা $75°$ বৃহত্তর।

সুতরাং $\angle BAC$, $\angle ACB$ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিভিন্ন প্রকারের ত্রিভুজ অঙ্কন করিয়া মাপিয়া দেখ প্রত্যেক ত্রিভুজেই বৃহত্তর বাহুর বিপরীত বা সম্মুখীন কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত বা সম্মুখীন কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর। সুতরাং স্মরণ রাখিবে—

ত্রিভুজের দুইটি বাহু অসমান হইলে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ, ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়।

(2) BC একটি সরলরেখা লও। ইহার B ও C বিন্দুতে BC-র সহিত যথাক্রমে 30° ও 60° পরিমিত কোণ দুইটি এরূপে আঁক যেন উহাদের BC ব্যতীত অপর বাহুদ্বয় পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে।



$\angle ACB$ (60°), $\angle ABC$ (30°);

$\therefore$ $\angle ACB$, $\angle ABC$ অপেক্ষা বৃহত্তর।

এখন AB ও AC মাপিয়া দেখ AB, AC অপেক্ষা বড় কিনা। মাপিয়া দেখ AB, AC অপেক্ষা বৃহত্তর। অর্থাৎ কোন ত্রিভুজের বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। আবার উক্ত চিত্রে মাপিয়া দেখ $\angle BAC$ এর পরিমাণ 90°।

$\angle BAC$ (90°), $\angle ACB$ (60°) অপেক্ষা বৃহত্তর।

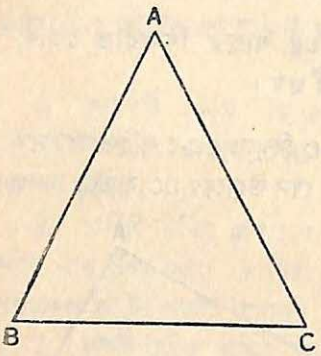
এখন BC ও AB মাপিয়া দেখ কোন্‌টি বড়। মাপিয়া দেখা যায় BC, AB অপেক্ষা বৃহত্তর। অর্থাৎ কোন ত্রিভুজের বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হয়।

বিভিন্ন প্রকারের ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া মাপিয়া দেখ প্রত্যেক ত্রিভুজেই বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হয়। সুতরাং স্মরণ রাখিবে—

ত্রিভুজের দুইটি কোণ অসমান হইলে, বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু, ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হয়।

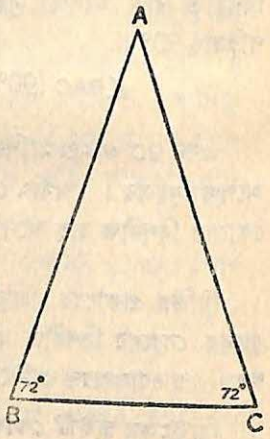
(3) ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহু দুইটি মাপিয়া দেখ উহারা পরস্পর সমান।

এখন AB-র বিপরীত কোণ ACB এবং AC-র বিপরীত কোণ ABC মাপিয়া দেখ। দেখিবে $\angle ACB$ ও $\angle ABC$ পরস্পর সমান। ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহু সমান থাকায় দেখা গেল AB ও AC বাহু দুইটির বিপরীত কোণ দুইটিও পরস্পর সমান। বিভিন্ন প্রকারের অনেক ত্রিভুজ এরূপে আঁক যেন উহাদের প্রত্যেকটির দুইটি বাহু পরস্পর সমান থাকে। মাপিয়া দেখিবে প্রত্যেক ত্রিভুজেই সমান বাহু দুইটির বিপরীত কোণ দুইটি পরস্পর সমান। সুতরাং স্মরণ রাখিবে—



ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান হইলে উহাদের বিপরীত কোণ দুইটিও পরস্পর সমান হইবে।

(4) যে কোন একটি BC সরলরেখা লও, B ও C বিন্দুতে BC-র সহিত সমান দুইটি সূক্ষ্ম কোণ (ধর প্রত্যেকটি 72°) আঁক। এই কোণ দুইটির BC ব্যতীত অপর বাহু দুইটি যেন পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। তাহা হইলে ABC ত্রিভুজে $\angle ABC = \angle ACB$ হইল। এখন AB ও AC মাপিয়া দেখ উহারা পরস্পর সমান কিনা। মাপিয়া দেখা যায় উহারা পরস্পর সমান। সুতরাং ABC ত্রিভুজে $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ সমান থাকায় উহাদের বিপরীত AB ও AC বাহু দুইটি পরস্পর সমান হইয়াছে।

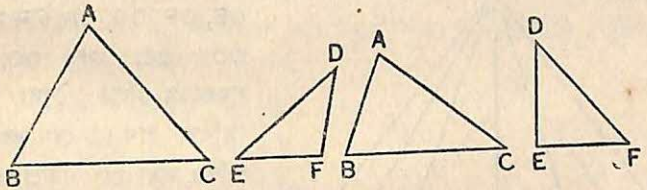


বিভিন্ন প্রকারের অনেক ত্রিভুজ এমন ভাবে আঁক যেন উহাদের দুইটি কোণ পরস্পর সমান হয়। মাপিয়া দেখিবে প্রত্যেক ত্রিভুজেই সমান কোণ দুইটির বিপরীত বাহু দুইটি পরস্পর সমান। সুতরাং স্মরণ রাখিবে—

ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর সমান হইলে উহাদের বিপরীত বাহু দুইটি পরস্পর সমান হইবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য। ত্রিভুজের বাহু ও কোণের পরস্পর সম্বন্ধ বিষয়ক যে চারিটি সত্য প্রতিষ্ঠিত করা হইয়াছে তাহা একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য, দুই বা ততোধিক বিভিন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য নহে। অর্থাৎ যদি দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একটির এক বাহু অপরটির এক বাহুর সহিত সমান হয়, তাহা হইলে প্রথম ত্রিভুজের উক্ত বাহুর বিপরীত কোণ দ্বিতীয় ত্রিভুজের উক্ত বাহুর বিপরীত কোণের সমান হইবার কোন সঙ্গত কারণ নাই।

চিত্র দ্বারা বিষয়টি পরিষ্কার ভাবে বুঝান হইতেছে।



চিত্র 1 চিত্র 2

চিত্র 1-এ ABC, DEF ত্রিভুজ দুইটির AB বাহু DE বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর, কিন্তু AB বাহুর বিপরীত $\angle ACB$, DE বাহুর বিপরীত $\angle DFE$ অপেক্ষা বৃহত্তর হয় নাই। আবার DEF ত্রিভুজের $\angle DFE$, ABC ত্রিভুজের $\angle ACB$ অপেক্ষা বৃহত্তর আছে; কিন্তু $\angle DFE$ এর বিপরীত বাহু DE, $\angle ACB$ এর বিপরীত বাহু AB অপেক্ষা বৃহত্তর নহে।

চিত্র 2-এ ABC ত্রিভুজের AB বাহু, DEF ত্রিভুজের DE বাহুর সমান। কিন্তু AB বাহুর বিপরীত $\angle ACB$, DE বাহুর বিপরীত $\angle DFE$ এর সমান নহে। আবার ABC ত্রিভুজের $\angle ACB$, DEF ত্রিভুজের $\angle EDF$ এর সমান; কিন্তু $\angle ACB$ এর বিপরীত বাহু AB, $\angle EDF$ এর বিপরীত বাহু EF এর সমান নহে।

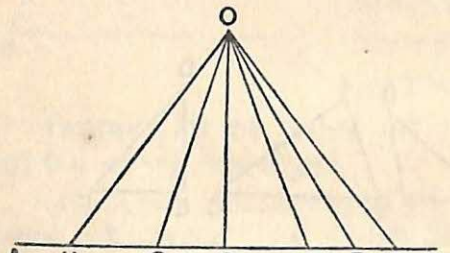
4. দুইটি উপপাদ্যের পরীক্ষা মূলক প্রমাণ।

কোন সরলরেখার উপর বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে পাতিত লম্বকে উক্ত বিন্দু হইতে সরলরেখাটির দূরত্ব (Distance) এবং উক্ত বিন্দু হইতে ঐ সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্ব ব্যতীত অপর যে কোন সরলরেখাকে তির্যক্ রেখা (Oblique) বলে।

কোন বিন্দু হইতে কোন সরলরেখার দূরত্ব উক্ত বিন্দু হইতে সরলরেখাটির উপর অঙ্কিত লম্ব দ্বারাই সূচিত হয়।

(a) **লম্ব ও তির্যকের সম্বন্ধ।**

AB একটি সরলরেখা এবং O উহার বহিঃস্থ একটি বিন্দু। O হইতে AB-এর উপর OC লম্ব টান (সেট্স্কোয়ার বা চাঁদার সাহায্যে)। O হইতে AB-র উপর আরও কয়েকটি সরলরেখা OD, OE, OF, OG, OH টান। OC, OD, OE, OF, OG, OH সরলরেখাগুলির দৈর্ঘ্য মাপিয়া লিখিয়া রাখ। দেখ সরলরেখা-গুলির মধ্যে OC সর্বাপেক্ষা ছোট কিনা। মাপিয়া দেখা যায়, OC-ই সর্বাপেক্ষা ছোট।



OC-এর সমান মাপের একখানি সরু কাঠি লইয়া OD, OE, OF, OG, OH সরলরেখার উপর O বিন্দুতে মিলাইয়া ধর। দেখিবে প্রত্যেক সরলরেখা ঐ কাঠি হইতে বড়।

এইরূপে অনেক সরলরেখা টানিয়া প্রত্যেকের উপর উহার বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে অনেক সরলরেখা টান এবং উক্ত বহিঃস্থ বিন্দু হইতে সরলরেখার উপর লম্ব টান (সেট্স্কোয়ারের সাহায্যে)। স্কেলের সাহায্যে মাপিয়া দেখ প্রত্যেক ক্ষেত্রেই লম্ব সরলরেখাটি সর্বাপেক্ষা ছোট হয়। সুতরাং স্মরণ রাখিবে—

কোন সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে উক্ত সরলরেখার উপর যতগুলি সরলরেখা টানা যায় তন্মধ্যে লম্বই ক্ষুদ্রতম।

অনুশীলনী 5

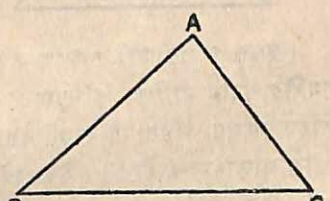
1. AB একটি সরলরেখা লও। উহার বহিঃস্থ কোন O বিন্দু হইতে AB-র উপর একটি লম্ব ও অপর চারিটি সরলরেখা টান। মাপিয়া দেখাও লম্বটি ক্ষুদ্রতম।

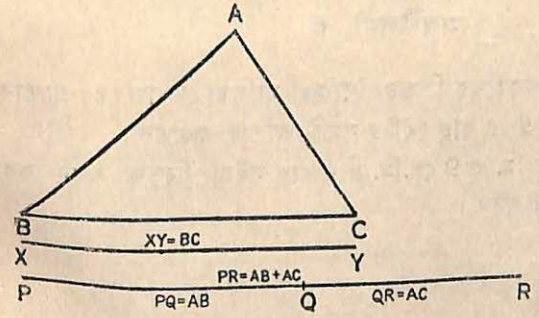
2. কোন সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ সরলরেখার উপর একটি লম্ব ও যে কোন তিনটি তির্যক্ সরলরেখা টান। মাপিয়া দেখাও যে লম্বটি প্রত্যেক তির্যক্ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

3. AB সরলরেখার বহিঃস্থ O বিন্দু হইতে AB-র উপর দুইটি লম্ব টানা যায় কিনা অঙ্কন সাহায্যে পরীক্ষা করিয়া দেখ।

(b) ত্রিভুজের দুই বাহুর সমষ্টির সহিত তৃতীয় বাহুর সম্বন্ধ

(i) নীচে ABC ত্রিভুজ আঁকা আছে। AB ও AC বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য স্কেলের সাহায্যে নির্ণয় কর। দেখা গেল AB = 3 সে.মি. এবং AC = 2·5 সে.মি.। সুতরাং AB ও AC বাহু দুইটির সমষ্টি = (3+2·5) সে.মি. = 5·5 সে.মি.। এখন ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহু BC মাপিয়া দেখ কত হয়। মাপিয়া দেখ BC = 4 সে.মি.। 4 সে.মি. অপেক্ষা 5·5 সে.মি. বৃহত্তর। সুতরাং ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহু দুইটির সমষ্টি তৃতীয় বাহু BC অপেক্ষা বৃহত্তর। এইভাবে মাপিয়া দেখ AB ও BC বাহু দুইটির সমষ্টি তৃতীয় বাহু AC অপেক্ষা বৃহত্তর এবং BC ও AC বাহু দুইটির সমষ্টি তৃতীয় বাহু AB অপেক্ষা বৃহত্তর।





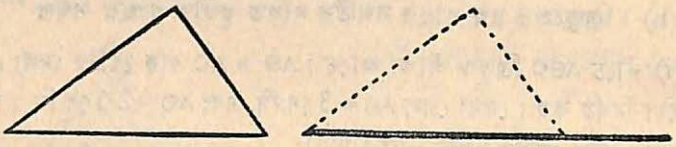
(ii) যে কোন একটি ত্রিভুজ ABC আঁক। একটি সরলরেখা আঁক। উহা হইতে AB-র সমান PQ এবং AC-র সমান QR-অংশ কাট। তাহা হইলে PR = PQ + QR

$=AB+BC$. BC-এর ঠিক নীচে BC বাহুর সমান XY সরলরেখা স্থাপন কর।

চিত্র হইতে অতি সহজেই দেখা যায় যে XY অপেক্ষা PR বৃহত্তর ; অর্থাৎ ABC ত্রিভুজে AB ও AC বাহু দুইটির সমষ্টি তৃতীয় বাহু BC অপেক্ষা বৃহত্তর।

ঠিক এই ভাবে পরীক্ষা করিয়া দেখ AB ও BC বাহু দুইটির সমষ্টি AC বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর এবং BC ও AC বাহু দুইটির সমষ্টি AB অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিভিন্ন প্রকারের অনেক ত্রিভুজ আঁক। প্রত্যেক ত্রিভুজের তিন বাহু মাপিয়া পরীক্ষা কর। দেখিবে প্রত্যেক ত্রিভুজেই যে কোন দুইটি বাহু একত্রে উহার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।



(অন্যরূপ পরীক্ষা) একখণ্ড সূতা লইয়া কোন ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টির সমান মাপিয়া ছিঁড়িয়া লও। পরে উহাকে তৃতীয় বাহুর এক প্রান্তের সহিত সংলগ্ন করিয়া ঐ বাহুর বরাবর টানিয়া ধর। দেখিবে সূতা তৃতীয় বাহুর প্রান্ত ছাড়াইয়া যাইবে। ইহা হইতে বুঝিতে পারিবে যে ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। তাহা হইলে স্মরণ রাখিবে—

ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

অনুশীলনী 6

1. পাঁচটি বিভিন্ন প্রকারের ত্রিভুজ আঁকিয়া মাপিয়া দেখাও যে প্রত্যেক ত্রিভুজের যে কোন বাহু অপর বাহু দুইটির সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

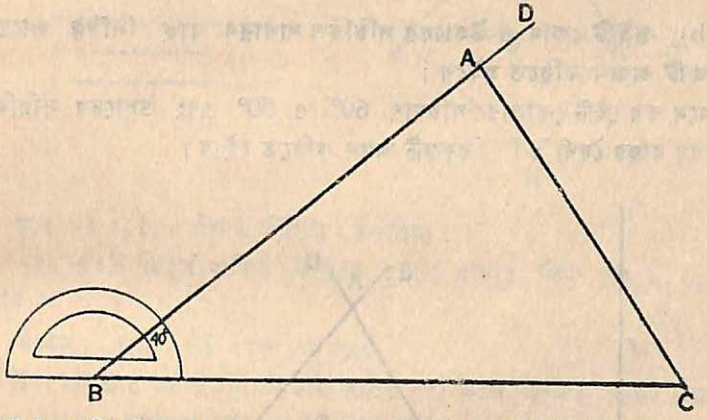
2. 3 সে.মি., 5 সে.মি. ও 9 সে.মি. দীর্ঘ বাহু লইয়া ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায় কিনা পরীক্ষা করিয়া দেখ।

তৃতীয় অধ্যায়

ত্রিভুজ অঙ্কন

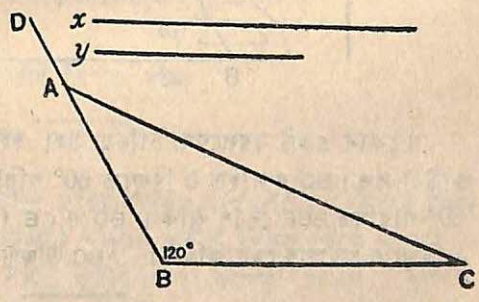
(a) **এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য ও উহাদের অন্তর্ভূত কোণ নির্দিষ্ট।**

(i) মনে কর বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য 7·5 সে.মি. ও 6·4 সে.মি. এবং ইহাদের অন্তর্ভূত কোণ 40°। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।



7·5 সে.মি. দীর্ঘ BC সরলরেখা লও। B বিন্দুতে চাঁদার সাহায্যে BC-র সহিত 40° পরিমিত CBD কোণ আঁক। BD হইতে 6·4 সে.মি. (স্কেল বসাইয়া) BA অংশ কাট। AC যুক্ত কর। ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

(ii) মনে কর বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য x ও y এবং অন্তর্ভূত কোণের পরিমাণ 120°। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

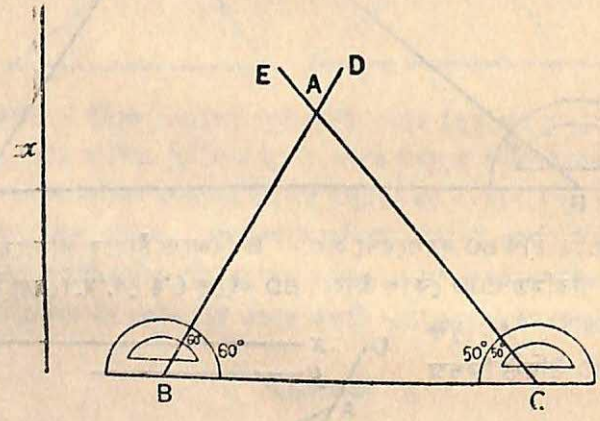


x-এর সমান BC বাহু লও। B বিন্দুতে চাঁদার সাহায্যে BC-র সহিত 120° পরিমিত CBD কোণ আঁক। BD হইতে y এর সমান BA অংশ কাট। AC যুক্ত কর। ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

দ্রষ্টব্য। ত্রিভুজ অঙ্কন করা হইলে মাপিয়া পরীক্ষা করিয়া দেখিবে যে অঙ্কিত ত্রিভুজের বাহু ও কোণ নির্দিষ্ট বাহু ও কোণের সমান হইয়াছে কিনা। সমান না হইলে অঙ্কনের দোষ হইয়াছে বুঝিতে হইবে এবং পুনরায় অঙ্কন করিবে।

(b) **দুইটি কোণ ও উহাদের সন্নিহিত সাধারণ বাহু নির্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।**

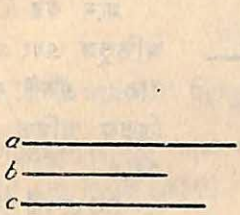
মনে কর দুইটি কোণের পরিমাণ 60° ও 50° এবং উহাদের সন্নিহিত সাধারণ বাহুর দৈর্ঘ্য x। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

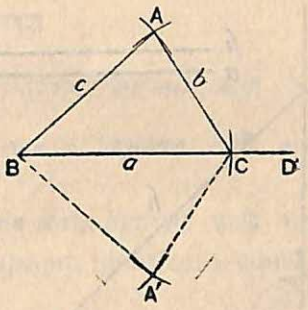


যে কোন একটি সরলরেখা টানিয়া উহা হইতে x-এর সমান BC অংশ কাটিয়া লও। BC-র সহিত B বিন্দুতে 60° পরিমিত CBD কোণ এবং C বিন্দুতে 50° পরিমিত BCE কোণ আঁক। BD ও CE (প্রয়োজন হইলে বর্ধিত হইয়া) A বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

দ্রষ্টব্য। বাহুটির দৈর্ঘ্যের মাপ সেন্টিমিটারে দেওয়া থাকিলে স্কেলের সাহায্য লইবে।

(c) তিন বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে ; উহাদের দ্বারা একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।





মনে কর a, b, c তিনটি নির্দিষ্ট সরলরেখা।

এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার তিন বাহু a, b, c-র সমান।

অঙ্কন। BD একটি সরলরেখা লও।

উহা হইতে a-সরলরেখার সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও। C-কে কেন্দ্র করিয়া b-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর।

আবার B-কে কেন্দ্র করিয়া c-ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কিত কর।

মনে কর উক্ত চাপ দুইটি পরস্পর A-বিন্দুতে ছেদ করিল।

AB, AC যুক্ত কর।

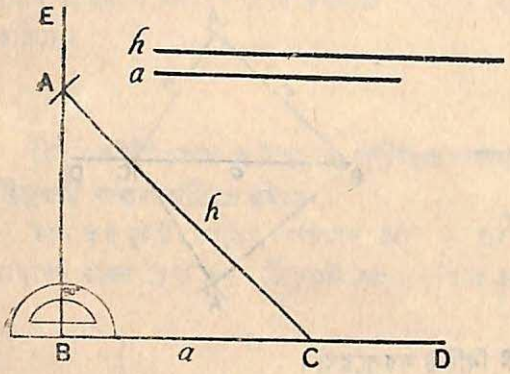
তাহা হইলে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

দ্রষ্টব্য। (i) B ও C-কে কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত চাপ দুইটি BC রেখার উভয় পার্শ্বেই ছেদ করিতে পারে। সুতরাং A′BCও অভীষ্ট ত্রিভুজ হইতে পারে।

(ii) ত্রিভুজের দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। সুতরাং a, b, c-এর যে কোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর না হইলে ত্রিভুজ অঙ্কন অসম্ভব হইবে।

(iii) যে কোন দৈর্ঘ্যের সমান তিনটি বাহু লইয়া ত্রিভুজ অঙ্কিত করা হইলে ত্রিভুজটি সমবাহু হইবে।

(d) অতিভুজ এবং অপর এক বাহু নির্দিষ্ট আছে; সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।



মনে কর h নির্দিষ্ট অতিভুজ এবং a নির্দিষ্ট বাহু। একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

BD একটি সরলরেখা লও এবং ইহা হইতে a-র সমান BC অংশ কাটিয়া লও। B বিন্দুতে BC-র উপর BE লম্ব টান (সেট্-স্কোয়ারের সাহায্যে অথবা চাঁদার সাহায্যে B বিন্দুতে BC-র উপর 90° পরিমিত CBE কোণ আঁকিয়া)। C-কে কেন্দ্র করিয়া h-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক যাহা BE-কে A-বিন্দুতে ছেদ করে। AC যুক্ত কর। ABC উদ্দিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ হইল।

অনুশীলনী 7

1. ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর, যাহার দুই বাহু ও অন্তর্ভূত কোণের পরিমাণ :—
(1) 4 সে. মি., 6 সে. মি., 45°. (2) 4·6 সে. মি., 6·2 সে. মি., 90°
(3) 5 সে. মি., 7 সে. মি., 135° (4) 4·8 সে. মি., 6·3 সে. মি., 60°

2. ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর, যাহার দুই কোণ ও সন্নিহিত বাহুর পরিমাণ :—
(1) 90°, 45°, 4 সে.মি. (2) 60°, 30°, 4·4 সে.মি. (3) 15°, 22½°, 7সে.মি.

3. নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট বাহু লইয়া ত্রিভুজ অঙ্কিত কর :—
(1) 4 সে.মি., 6 সে.মি., 8 সে.মি. (2) 8 সে.মি., 6 সে. মি., 10 সে.মি.
(3) 4·6 সে.মি., 8·2 সে.মি., 10·4 সে.মি. (4) 4 সে.মি., 3·8 সে.মি. 5·7 সে.মি.

4. নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট বাহুগুলির উপর সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর :—
3·5 সে.মি., 4 সে.মি., 4·6 সে.মি., 5·8 সে.মি., 7·1 সে.মি., 6·5 সে.মি.

5. সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর, যাহার অতিভুজ এবং অপর এক বাহুর পরিমাণ :
(1) 10 সে.মি., 6 সে.মি. (2) 7·2 সে.মি., 4·3 সে.মি. (3) 9·4 সে.মি., 5·8 সে.মি.

চতুর্থ অধ্যায়

দুইটি সর্বসম ত্রিভুজ ও সামান্তরিকের ধর্ম

1. **ত্রিভুজের সর্বসমতা**—প্রত্যেক ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ—তিনটি বাহু এবং তিনটি কোণ।

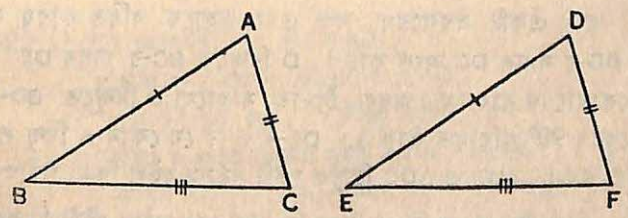
একটি ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গের সমান হইলে, ত্রিভুজ দুইটিকে সর্বসম (congruent, identically equal or equal in all respects) বলা হয়।

দুইটি সর্বসম ত্রিভুজের সমান সমান কোণের বিপরীত বাহু দুইটিকে অনুরূপ বাহু (corresponding side) এবং সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণ দুইটিকে অনুরূপ কোণ (corresponding angles) বলে।

2. **দুইটি সর্বসম ত্রিভুজের ধর্ম**—দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হইলে উহাদের অনুরূপ বাহু ও অনুরূপ কোণগুলি পরস্পর সমান হয় এবং উহাদের ক্ষেত্রফলও সমান হয়।

দুইটি ত্রিভুজের বাহু ও কোণগুলি পরস্পর সমান না হইলেও উহাদের ক্ষেত্রফল সমান হইতে পারে ; কিন্তু সে ক্ষেত্রে ত্রিভুজ দুইটিকে সর্বসম বলা চলে না।

নীচে ABC, DEF দুইটি সর্বসম ত্রিভুজের চিত্র রহিয়াছে।



মাপিয়া দেখ AB = DE, AC = DF, BC = EF ;
এবং ∠A = ∠D, ∠B = ∠E, ∠C = ∠F,
ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

পূর্বেই বলা হইয়াছে সর্বসম দুইটি ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু ও অনুরূপ কোণগুলি পরস্পর সমান হয়। ABC, DEF সর্বসম ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

যদি AB = DE হয়, তাহা হইলে $\angle C = \angle F$ হইবে ;
যদি BC = EF হয়, তাহা হইলে $\angle A = \angle D$ হইবে ;
যদি AC = DF হয়, তাহা হইলে $\angle B = \angle E$ হইবে ;
যদি $\angle A = \angle D$ হয়, তাহা হইলে BC = EF হইবে ;
যদি $\angle B = \angle E$ হয়, তাহা হইলে AC = DF হইবে ;
যদি $\angle C = \angle F$ হয়, তাহা হইলে AB = DE হইবে।

তিন বা ততোধিক সর্বসম ত্রিভুজেরও সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে এবং সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুগুলিও পরস্পর সমান হইবে।

অনুশীলনী 8

1. 6 সে.মি. ও 5 সে.মি. দীর্ঘ দুই বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ 60° লইয়া দুইটি ত্রিভুজ ABC ও DEF অঙ্কিত কর যেন BC ও EF-এর প্রত্যেকের দৈর্ঘ্য 6 সে.মি AB ও DE-এর প্রত্যেকের দৈর্ঘ্য 5 সে.মি. এবং $\angle B$ ও $\angle E$-এর প্রত্যেকের পরিমাণ 60° হয়।

এখন বল, ABC ত্রিভুজের AC বাহু, DEF ত্রিভুজের কোন্ বাহুর সমান ?
ABC ত্রিভুজের $\angle A$, DEF ত্রিভুজের কোন্ কোণের সমান ?
ABC ত্রিভুজের $\angle C$, DEF ত্রিভুজের কোন্ কোণের সমান ?

2. BD একটি সরলরেখা লও এবং উহাকে বর্ধিত করিয়া বর্ধিতাংশ হইতে BD-র সমান DC অংশ কাট। D বিন্দুতে BC-র উপর DE লম্ব টান (সেট্স্কোয়ারের সাহায্যে অথবা চাঁদার সাহায্যে D বিন্দুতে BD-র সহিত BDE কোণ 90° পরিমিত আঁক)। DE-র উপর যে কোন A বিন্দু লও। AB, AC যুক্ত কর। ABD ও ADC ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইল কিনা পরীক্ষা কর।

3. 5 সে.মি., 4 সে.মি. ও 3 সে.মি. দীর্ঘ বাহু লইয়া দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। মাপিয়া দেখ ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ কোণগুলি সমান কিনা। ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম কিনা পরীক্ষা করিয়া দেখ।

4. দুইটি সমান সরলরেখা BC ও EF টান। BC ও EF-এর সহিত B ও E

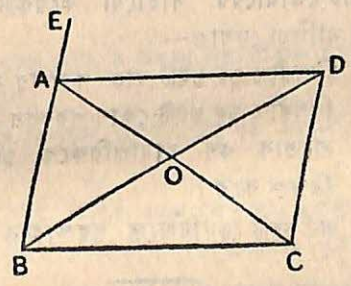
বিন্দুতে 45° পরিমিত এবং C ও F বিন্দুতে 30° পরিমিত কোণ আঁকিয়া ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটি আঁক।

মাপিয়া দেখ AB = DE, AC = DF এবং ∠A = ∠D ; তাহা হইলে ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইল কিনা বল।

5. ABC ও DEF দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ আঁক যেন অতিভুজ AC ও DF প্রত্যেকে 6 সে.মি. দীর্ঘ হয় এবং BC বাহু ও EF বাহু প্রত্যেকে 3 সে মি. দীর্ঘ হয়। মাপিয়া দেখাও AB = DE, ∠A = ∠D, ∠C = ∠F.

---

3. **সামান্তরিকের ধর্ম**—BC একটি সরলরেখা লও। B-বিন্দুতে BC-র সহিত যে কোন CBE কোণ আঁক। BC সরলরেখায় যে কোন একটি বিন্দু A লও। এখন সেট্স্কোয়ারের সাহায্যে A বিন্দু দিয়া BC-র সমান্তরাল এবং C বিন্দু দিয়া AB-র সমান্তরাল দুইটি সরলরেখা টান, যাহারা পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে সংজ্ঞা অনুসারে ABCD একটি সামান্তরিক হইল ; কারণ AB ও CD সমান্তরাল এবং BC ও AD সমান্তরাল।



মাপিয়া দেখ AB = DC, BC = AD,

∠BAD = ∠BCD, ∠ABC = ∠ADC

AC কর্ণ যুক্ত কর। পরীক্ষা করিয়া দেখ

ABC ও ADC ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইয়াছে।

মাপিয়া দেখ { কারণ AB = DC, BC = AD, AC উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু
এবং ∠ABC = ∠ADC, ∠BAC = ∠ACD, ∠BCA = ∠DAC

BD কর্ণ যুক্ত করিয়া অনুরূপ পরীক্ষা করিয়া দেখ ABD ও CBD ত্রিভুজ দুইটিও সর্বসম।

AC ও BD কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর নাম দাও O.

এখন মাপিয়া দেখ OA = OC এবং OB = OD অর্থাৎ AC ও BD কর্ণ দুইটি ছেদ বিন্দুতে পরস্পরকে সমদ্বিণ্ডিত করিয়াছে। সুতরাং মনে রাখিবে—

1. সামান্তরিকের বিপরীত দুই দুইটি বাহু ও বিপরীত দুই দুইটি কোণ পরস্পর সমান।

2. প্রত্যেক কর্ণ সামান্তরিককে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

3. সামান্তরিকের কর্ণ দুইটি ছেদ বিন্দুতে পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

বিভিন্ন প্রকারের সামান্তরিক অঙ্কিত করিয়া উক্ত সত্য প্রতিষ্ঠিত করা যায় পরীক্ষা করিয়া দেখ।

অনুশীলনী 9

1. স্কেল ও সেট্‌স্কোয়ারের সাহায্যে কয়েকটি বিভিন্ন প্রকারের সামান্তরিক আঁক এবং মাপিয়া দেখাও—

প্রত্যেকের (1) বিপরীত দুই দুইটি বাহু পরস্পর সমান।

(2) বিপরীত দুহ দুইটি কোণ পরস্পর সমান।

(3) প্রত্যেক কর্ণ সামান্তরিককে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

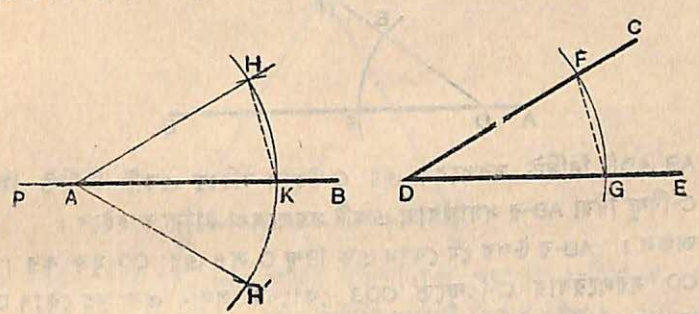
(4) কর্ণ দুহটি ছেদবিন্দুতে পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

পঞ্চম অধ্যায়

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা

1. কোণের সমান কোণ অঙ্কন।

একটি সরলরেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান একটি কোণ অঙ্কন করিতে হইবে।



PB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা, A উহার উপরিস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং CDE একটি নির্দিষ্ট কোণ।

PB সরলরেখার A-বিন্দুতে CDE কোণের সমান একটি কোণ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। D-কে কেন্দ্র করিয়া এবং যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহা DC-কে F-বিন্দুতে এবং DE-কে G-বিন্দুতে ছেদ করে।

A-কে কেন্দ্র করিয়া DG-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহা AB-কে **K**-বিন্দুতে ছেদ করে।

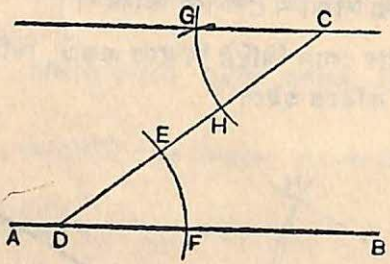
K-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া FG-ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহা পূর্ব চাপটিকে H-বিন্দুতে ছেদ করে। AH যুক্ত কর।

তাহা হইলে, **K**AH অভীষ্ট কোণ হইল।

দ্রষ্টব্য। AB সরলরেখার যে কোন পার্শ্বেই অভীষ্ট কোণটি অঙ্কিত করা যায়। KAH′ কোণও অভীষ্ট কোণ হইতে পারে।

2. সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন।

কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল একটি সরলরেখা টানিতে হইবে।



AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং C উহার বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। C-বিন্দু দিয়া AB-র সমান্তরাল একটি সরলরেখা টানিতে হইবে।

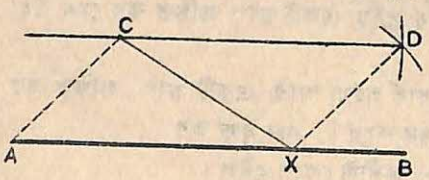
অঙ্কন। AB-র উপর যে কোন এক বিন্দু D লও এবং CD যুক্ত কর।

CD সরলরেখার C-বিন্দুতে CDB কোণের সমান একান্তর কোণ DCG অঙ্কিত কর, অর্থাৎ CD সরলরেখার যে পার্শে CDB কোণ আছে তাহার বিপরীত দিকে CDB কোণের সমান DCG কোণ অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে CG সরলরেখা C বিন্দু দিয়া AB-র সমান্তরাল হইল।

দ্বিতীয় প্রণালী। CD-কে E′ বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া ADE′ কোণের সমান অনুরূপ কোণ DCG অঙ্কিত করিলেও CG সরলরেখা AB-র সমান্তরাল হইবে।

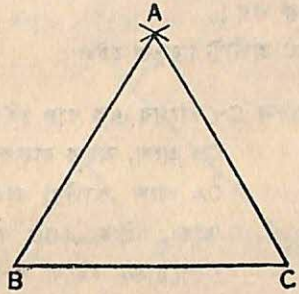
তৃতীয় প্রণালী। AB সরলরেখার উপর X একটি বিন্দু লও। C-কে কেন্দ্র করিয়া এবং AX-ব্যাসার্ধ লইয়া এবং X-কে কেন্দ্র করিয়া AC-ব্যাসার্ধ লইয়া AB-র যে পার্শ্বে C আছে সেই পার্শ্বে দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহারা D-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে। CD যুক্ত কর। এক্ষণে CD, AB-র সমান্তরাল হইল।



3, বিবিধ ত্রিভুজ অঙ্কন।

(1) কোন নির্দিষ্ট সীমাবদ্ধ সরলরেখার উপর একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

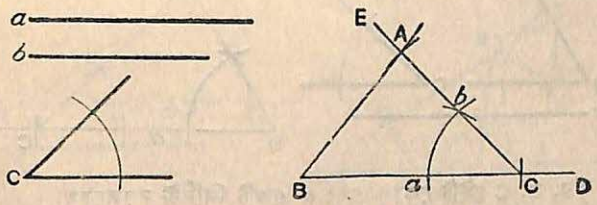
মনে কর BC একটি নির্দিষ্ট সীমাবদ্ধ সরলরেখা। উহার উপর একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে। B ও C-কে কেন্দ্র করিয়া BC-র সমান



ব্যাসার্ধ লইয়া এমন দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যাহারা পরস্পর A-বিন্দুতে ছেদ করে। AB, AC যুক্ত কর। ABC অভীষ্ট সমবাহু ত্রিভুজ হইল।

তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকিলে ত্রিভুজ অঙ্কনের যে প্রণালী 37 পৃষ্ঠায় বর্ণিত হইয়াছে সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন-প্রণালী উহারই অনুরূপ। এস্থলে মাত্র তিনটি বাহু সমান ধরা হইয়াছে।

(2) দুই বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।



মনে কর, a, b দুইটি সরলরেখা এবং C একটি নির্দিষ্ট কোণ।

এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার দুই বাহু যথাক্রমে a ও b-র সমান এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণটি C-কোণের সমান।

অঙ্কন। BD একটি সরলরেখা লও।

উহা হইতে a-র সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও।

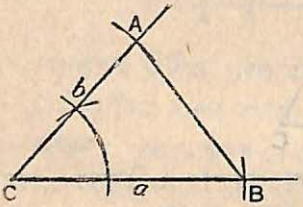
BC-সরলরেখার C-বিন্দুতে প্রদত্ত C-কোণের সমান করিয়া $\angle BCE$ অঙ্কিত কর।

CE হইতে b-র সমান করিয়া CA অংশ কাটিয়া লও।

AB যুক্ত কর।

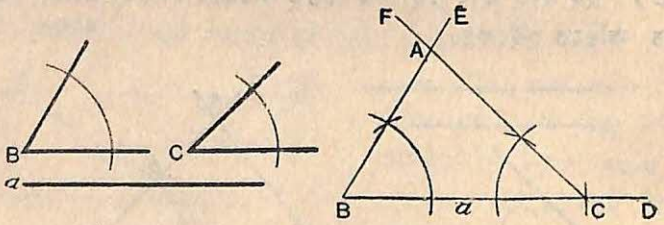
এক্ষণে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

দ্বিতীয় প্রণালী। প্রদত্ত C-কোণের এক বাহু হইতে a-র সমান করিয়া CB অংশ, অপর বাহু হইতে b-র সমান করিয়া CA অংশ কাটিয়া লও। AB যুক্ত কর। তাহা হইলে ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইবে; (প্রয়োজন হইলে C-কোণের উভয় বাহুই বর্ধিত করা যাইতে পারে।)



---

(3) **দুইটি কোণ এবং উহাদের সন্নিহিত সাধারণ বাহু নির্দিষ্ট আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।**



মনে কর, B, C দুইটি কোণ এবং a একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা।

এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার একটি বাহু a-র সমান এবং তৎসন্নিহিত কোণদ্বয় যথাক্রমে $\angle B$ এবং $\angle C$-র সমান।

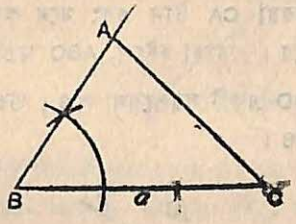
অঙ্কন। BD একটি সরলরেখা লও।

উহা হইতে a-র সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও। B বিন্দুতে $\angle B$-কোণের সমান $\angle CBE$, এবং C-বিন্দুতে $\angle C$-কোণের সমান $\angle BCF$ অঙ্কিত কর।

মনে কর, BE ও CF, A-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল।

তাহা হইলে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

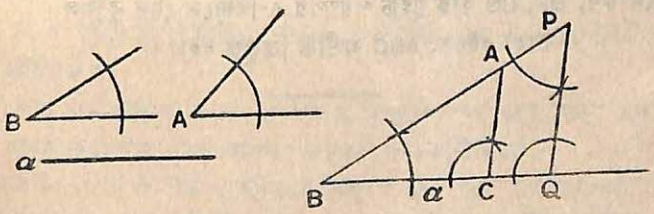
দ্বিতীয় প্রণালী। প্রদত্ত $\angle C$-র এক বাহু হইতে (প্রয়োজন হইলে বর্ধিত করিয়া) a-র সমান করিয়া CB লও।



B বিন্দুতে $\angle B$-র সমান $\angle CBA$ অঙ্কিত কর। মনে কর BA, $\angle C$-র অপর বাহুকে A-বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

দ্রষ্টব্য। $\angle B$ এবং $\angle C$-এর সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ন্যূন হওয়া আবশ্যক।

(4) দুইটি কোণ এবং উহাদের একটি কোণের বিপরীত বাহু নির্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।



মনে কর B, A দুইটি নির্দিষ্ট কোণ এবং a একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা।

এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার দুইটি কোণ B, A কোণের

সমান এবং উহাদের যে কোন কোণের (ধর, $\angle A$-এর) সম্মুখীন বাহু a-সরলরেখার সমান হয়।

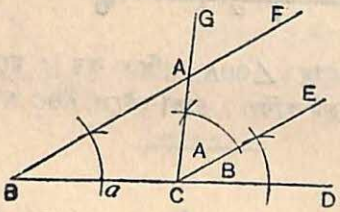
অঙ্কন। BPQ একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার $\angle PBQ = \angle B$ এবং $\angle BPQ = \angle A$.

(1) এখন, যদি $BQ = a$ হয়, তাহা হইলে BPQ অভীষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

(2) অন্যথায়, BQ হইতে (প্রয়োজন হইলে বর্ধিত করিয়া) a-র সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও।

QP-র সমান্তরাল করিয়া CA টান এবং মনে কর CA, BP বা বর্ধিত BP-কে A-বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

দ্বিতীয় প্রণালী। BD একটি সরলরেখা লও ; উহা হইতে a-র সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও।



BD সরলরেখার একই দিকে B ও C বিন্দুতে $\angle B$-এর সমান CBF, DCE দুইটি কোণ অঙ্কিত কর।

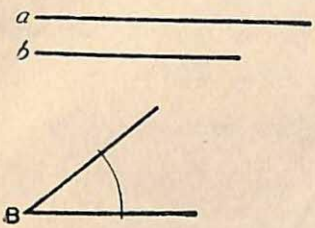
CE সরলরেখার C-বিন্দুতে $\angle A$-এর সমান $\angle ECG$ অঙ্কিত কর।

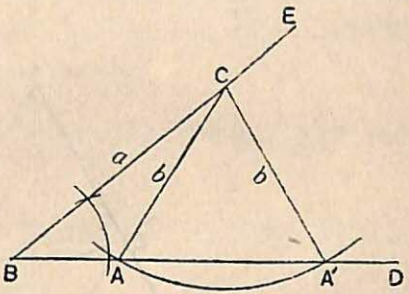
মনে কর, BF, CG বাহু দুইটি পরস্পর A-বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

---

(5) দুইটি বাহু এবং উহাদের এক বাহুর বিপরীত কোণ নির্দিষ্ট আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।





মনে কর a, b দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং B একটি নির্দিষ্ট কোণ।

এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার একবাহু a-র সমান, একটি কোণ $\angle$B-র সমান এবং $\angle$B-র বিপরীত বাহু b-র সমান।

অঙ্কন। BD একটি সরলরেখা লও এবং উহার B-বিন্দুতে $\angle$B-র সমান $\angle$DBE অঙ্কিত কর।

BE হইতে a-র সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও। C-কে কেন্দ্র করিয়া b-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর। মনে কর এই চাপ BD-কে A, A′ এই দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিল। CA, CA′ যুক্ত কর।

তাহা হইলে AB অথবা A′ BC দুইটিই অভীষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

দ্রষ্টব্য। (1) C-কে কেন্দ্র করিয়া যে চাপ অঙ্কিত করা হইয়াছে উহা BD-কে A, A′ দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে বলিয়া ABC ও A′BC দুইটি অভীষ্ট ত্রিভুজ হইয়াছে।

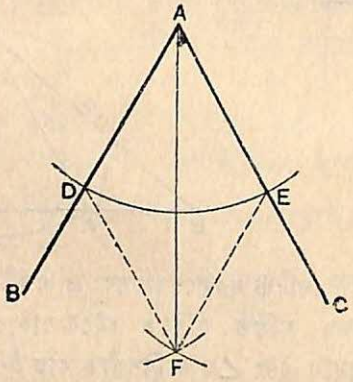
(2) যদি উক্ত চাপ BD-কে একটিমাত্র বিন্দুতে স্পর্শ করে, তবে একটিমাত্র ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায় এবং অঙ্কিত ত্রিভুজটি সমকোণী হয়।

(3) যদি চাপটি BD-কে একটিমাত্র বিন্দুতে ছেদ করে অর্থাৎ b-বাহু a-বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হয় বা a-বাহুর সমান হয়, তাহা হইলে একটিমাত্র ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায়।

(4) চাপটি BD-কে স্পর্শ বা ছেদ না করিলে কোন ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায় না।

কোণ সমদ্বিখণ্ডন।

একটি নির্দিষ্ট কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।



BAC একটি নির্দিষ্ট কোণ।

ইহাকে সমান দুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন। A-কে কেন্দ্র করিয়া এবং যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যেন ইহা AB ও AC-কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে।

D ও E-কে কেন্দ্র করিয়া এবং DE-ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর।

মনে কর এই চাপ দুইটি পরস্পর F-বিন্দুতে ছেদ করিল। AF সংযুক্ত কর!

এক্ষণে, AF, BAC কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল।

দ্রষ্টব্য। DE-কেই ব্যাসার্ধ লইতে হইবে এমন কোন নিয়ম নাই। এমন ব্যাসার্ধ লইতে হইবে যাহাতে চাপ দুইটি পরস্পর ছেদ করে। DE-র অর্ধেকের বেশী ব্যাসার্ধ লইয়া চাপ অঙ্কিত করিলে উহারা অবশ্যই পরস্পর ছেদ করিবে।

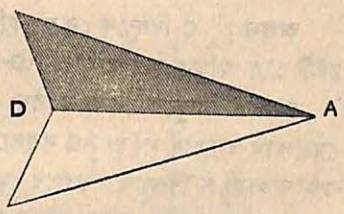
মন্তব্য। প্রকৃত অঙ্কনের বিশুদ্ধতা নির্ণয়ের জন্য যথোপযুক্ত যন্ত্রের সাহায্যে পরিমাপ করা আবশ্যক। উল্লিখিত স্থলে চাঁদা দ্বারা মাপিয়া দেখ, BAF, CAF কোণদ্বয় সমান কিনা।

ব্যবহারিক প্রণালী

(1) [চাঁদার সাহায্যে]—চাঁদা দ্বারা BAC কোণটির পরিমাণ নির্ণয় করিয়া AB অথবা AC বাহুর সহিত BAC কোণের মধ্যে উহার অর্ধপরিমিত কোণ অঙ্কিত করিলেই ∠BAC সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

এই প্রণালীতে অঙ্কন ও পরিমাপের সূক্ষ্মতার উপর অঙ্কনের শুদ্ধতা নির্ভর করে।

(2) [কাগজ ভাঁজ করিয়া]—কাগজে BAC কোণটি অঙ্কিত করিয়া AB, AC ও BC-র বরাবর কাগজখানি কাটিয়া কোণটি পৃথক্ কর। কাগজখানিকে মাঝখানের বরাবর এমন ভাবে ভাঁজকর যেন AB ধার AC ধারের সহিত মিশিয়া যায়। কাগজের মাঝখানের ভাঁজটিকে AD সরলরেখা মনে কর। এক্ষণে AD ভাঁজের বরাবর ∠BAC সমদ্বিখণ্ডিত হইল।

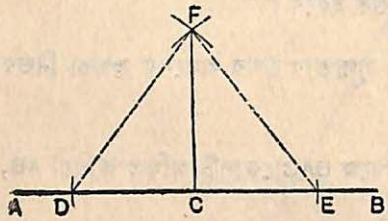


মন্তব্য। কার্যতঃ এই প্রণালীর কোন সার্থকতা নাই। কিন্তু প্রত্যক্ষ প্রক্রিয়া দ্বারা এই ধারণাই প্রথম শিক্ষার্থিগণের মনে বদ্ধমূল হইবে যে AD সরলরেখাই BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

দ্রষ্টব্য। উক্ত প্রণালীতে কাগজখানি দুই বার ভাঁজ করিলে কোণটি চার সমান ভাগে, তিনবার ভাঁজ করিলে আট সমান ভাগে, চারবার ভাঁজ করিলে ষোল সমান ভাগে বিভক্ত হয়, ইত্যাদি।

লম্ব অঙ্কন।

(1) **কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপরিস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার উপর একটি লম্ব টানিতে হইবে।**



AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং C উহার উপরিস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

C-বিন্দুতে AB-র উপর একটি লম্ব টানিতে হইবে।

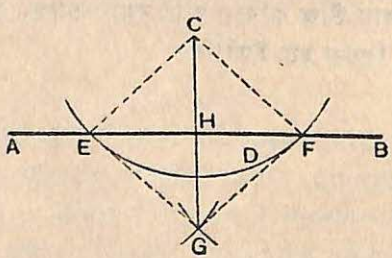
অঙ্কন। C-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া এমন দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যাহারা AB-কে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে।

D ও E বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং প্রত্যেক ক্ষেত্রে DE-র অর্ধ অপেক্ষা বড় যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া AB সরলরেখার একই পার্শ্বে এমন দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যাহারা F-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে।

CF যুক্ত কর। তাহা হইলে CF, AB-র উপর লম্ব হইল।

দ্রষ্টব্য। C-বিন্দুটি AB সরলরেখার এক প্রান্তে অবস্থিত হইলে AB সরলরেখাকে C-র দিকে বর্ধিত করিয়া লইবে।

(2) **একটি সরলরেখার বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার উপর একটি লম্ব টানিতে হইবে।**



AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং C উহার বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

C হইতে AB-র উপর একটি লম্ব টানিতে হইবে।

অঙ্কন। AB-র যে পার্শ্বে C আছে তাহার বিপরীত পার্শ্বে D একটি বিন্দু লও। C-কে কেন্দ্র করিয়া CD-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর। ঐ চাপ যেন AB-কে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিল।

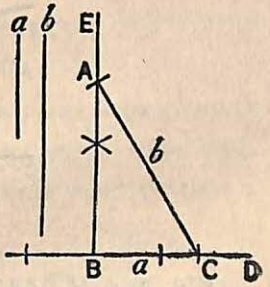
এখন E ও F-কে কেন্দ্র করিয়া এবং প্রতিক্ষেত্রে EF-এর অর্ধ অপেক্ষা বড় যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ AB-র যে দিকে C আছে উহার বিপরীত দিকে এমনভাবে অঙ্কিত কর যেন উহারা G-বিন্দুতে ছেদ করে।

CG যুক্ত কর। CG সরলরেখা যেন AB-কে H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। তাহা হইলে CH সরলরেখা AB-র উপর লম্ব হইল।

---

(3) অতিভুজ এবং অপর এক বাহু নির্দিষ্ট আছে। সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে কর, a নির্দিষ্ট বাহু এবং b নির্দিষ্ট অতিভুজ।



একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। BD একটি সরলরেখা হইতে a-র সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও। B হইতে BC-র উপর BE লম্ব টান। C-কে কেন্দ্র করিয়া b-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যাহা BE সরলরেখাকে A-বিন্দুতে ছেদ করে। AC যুক্ত কর। তাহা হইলে, ABC অভীষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ হইল।

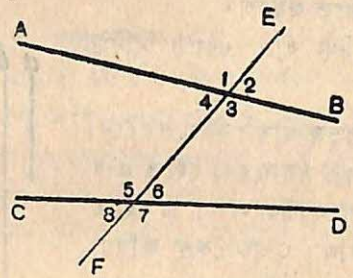
অনুশীলনী 10

1. একটি সমকোণ অঙ্কিত করিয়া উহাকে সমদ্বিখণ্ডিত কর।
2. 60° এবং 80° কোণকে চারি সমান ভাগে বিভক্ত কর।
3. যে কোন ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া উহার কোণত্রয়কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া দেখাও যে কোণত্রয়ের সমদ্বিখণ্ডক তিনটি একই বিন্দুতে মিলিত হয়।
4. একটি কোণকে এমন দুই ভাগে বিভক্ত কর যেন এক ভাগ অপর ভাগের তিনগুণ হয়।
5. 4সে মি.সরলরেখার একপ্রান্ত হইতে 1·4 সে.মি. দূরে উহার উপর লম্ব টান।
6. যে কোন ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দু হইতে উহাদের বিপরীত বাহুর উপর লম্ব টান। দেখ লম্ব তিনটি এক বিন্দুতে মিলিত হইল কিনা।

ষষ্ঠ অধ্যায়

সমান্তরাল সরলরেখার বিশেষ ধর্ম

1. **দুইটি সরলরেখা ও উহাদের ছেদক**—যে সরলরেখা দুই বা ততোধিক নির্দিষ্ট সরলরেখাকে ছেদ করে তাহাকে **ছেদক** (Transversal) বলে। নীচের চিত্রে EF সরলরেখা AB ও CD সরলরেখার একটি ছেদক।



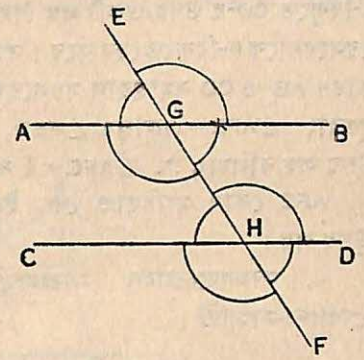
কোন ছেদক দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে দুইটি ছেদবিন্দুতে সর্বসমেত আটটি কোণ উৎপন্ন হয়। এই আটটি কোণের মধ্যে যে চারিটি কোণ সরলরেখা দুইটির ভিতরের দিকে অবস্থিত তাহাদিগকে **অন্তঃকোণ** (Interior angles) এবং যে চারিটি বাহিরের দিকে অবস্থিত তাহাদিগকে **বহিঃকোণ** (Exterior angles) বলে। উপরের চিত্রে 3, 4, ৩, 6 অন্তঃকোণ এবং 1, 2, 7, 8 বহিঃকোণ।

অন্তঃকোণ চারিটির মধ্যে 4 ও 6 কোণ দুইটিকে পরস্পর **একান্তর কোণ** (Alternate angles) বলে। 3 ও 5 কোণ দুইটিও পরস্পর একান্তর।

2 ও 6 কোণ দুইটির 2-কে বহিঃকোণ (Exterior angle) এবং 6-কে বিপরীত অন্তঃকোণ (Interior opposite angle) বলে ; 2 ও 6-কে পরস্পর **অনুরূপ কোণ** ও (Corresponding angles) বলা হয়। এইরূপে 1 ও 5, 8 ও 4 এবং 7 ও 3 ইহারাও পরস্পর অনুরূপ কোণ।

2. সমান্তরাল সরলরেখা ও ছেদক।

যে কোন CD সরলরেখা লও। উহার বহিঃস্থ G-বিন্দু দিয়া CD-র সমান্তরাল AGB সরলরেখা টান। EGHF একটি ছেদক টান যাহা AB ও CD-কে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করে। মাপিয়া দেখ (চাঁদার সাহায্যে অথবা চাপ টানিয়া ও মাপিয়া)—



(i) $\angle BGH = \angle GHC$ এবং $\angle AGH = \angle GHD$ } অর্থাৎ একান্তর কোণ দুইটি পরস্পর সমান হইয়াছে।

(ii) $\angle EGB = \angle GHD$, $\angle EGA = \angle GHC$, $\angle FHD = \angle HGB$, এবং $\angle FHC = \angle HGA$ } অর্থাৎ ছেদকের একই পার্শ্বস্থ বহিঃকোণ বিপরীত অন্তঃকোণের সমান অথবা অনুরূপ কোণগুলি পরস্পর সমান।

(iii) $\angle BGH + \angle GHD = 2$ সমকোণ এবং $\angle AGH + \angle GHC = 2$ সমকোণ } ছেদকের একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণ।

HG একটি সরলরেখা লইয়া উহার সহিত G বিন্দুতে এক পার্শ্বে $\angle BGH$-এর সমান একটি কোণ এবং বিপরীত পার্শ্বে $\angle GHD$-এর সমান একটি কোণ আঁক। দেখিবে অঙ্কিত কোণ দুইটির সাধারণ বাহু HG ব্যতীত অপর দুই বহিঃস্থ বাহু এক সরলরেখায় অবস্থিত হইয়াছে; সুতরাং কোণ দুইটির সমষ্টি = এক সরল কোণ = 2 সমকোণ। সুতরাং স্মরণ রাখিবে ঃ

একটি সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করিলে,

(1) **একান্তর কোণ দুইটি পরস্পর সমান হইবে।**

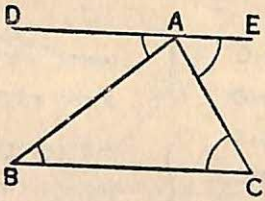
(2) **বহিঃকোণ ছেদকের একই পার্শ্বস্থ বিপরীত অন্তঃকোণের সমান হইবে।**

(3) **ছেদকের একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হইবে।**

3. AB, CD দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা টান। CD সরলরেখার যে কোন E-বিন্দুতে CD-র উপর একটি লম্ব টান। এই লম্বকে বর্ধিত কর যেন ইহা AB সরলরেখাকে F-বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে EF, AB-র উপরও লম্ব হইবে। কারণ AB ও CD সমান্তরাল সরলরেখা দুইটিকে EF সরলরেখা ছেদ করিয়াছে, সুতরাং $\angle AFE =$ একান্তর $\angle FED$, কিন্তু $\angle FED = 1$ সমকোণ (EF, CD-র উপর লম্ব বলিয়া), $\therefore \angle AFE = 1$ সমকোণ, $\therefore$ EF, AB-র উপর লম্ব।

AFE কোণ মাপিয়াও দেখ ইহা $90°$ বা সমকোণ, সুতরাং EF, AB-র উপর লম্ব।

4, **সমান্তরাল সরলরেখার ধর্ম ও ত্রিভুজের কোণ-সমষ্টি।**



ABC একটি ত্রিভুজ। BC-এর সমান্তরাল করিয়া A বিন্দু দিয়া DAE সরলরেখা টান। যেহেতু DE ও BC সমান্তরাল এবং AB উহাদিগকে ছেদ করিয়াছে, সুতরাং $\angle ABC =$ একান্তর $\angle DAB$; আবার যেহেতু, DE ও BC সমান্তরাল এবং AC উহাদিগকে ছেদ করিয়াছে, সুতরাং $\angle ACB =$ একান্তর $\angle EAC$.

$\therefore \angle ABC + \angle ACB = \angle DAB + \angle EAC$.

উভয় দিকে $\angle BAC$ যোগ কর ;

তাহা হইলে $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC$

$= \angle DAB + \angle EAC + \angle BAC$

= সরল কোণ DAE

= 2 সমকোণ।

মাপিয়া দেখ $\angle ABC = \angle DAB$ এবং $\angle ACB = \angle EAC$

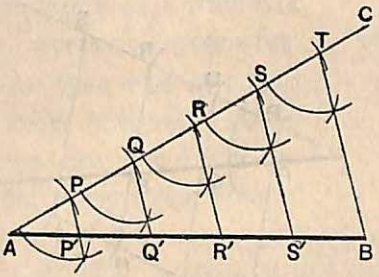
$\therefore \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = \angle DAB + \angle EAC + \angle BAC$

= সরল কোণ DAE = 2 সমকোণ।

সুতরাং **ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।**

5. সরলরেখার সম-বিভাগ।

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কতিপয় সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।



AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা।

ইহাকে কতিপয় সমান অংশে (মনে কর পাঁচ অংশে) বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB-র সহিত যে কোন কোণ করিয়া AC সরলরেখা টান।

AC হইতে যে কোন দৈর্ঘ্যের পাঁচটি সমান অংশ AP, PQ, QR, RS, ST পর পর কাটিয়া লও।

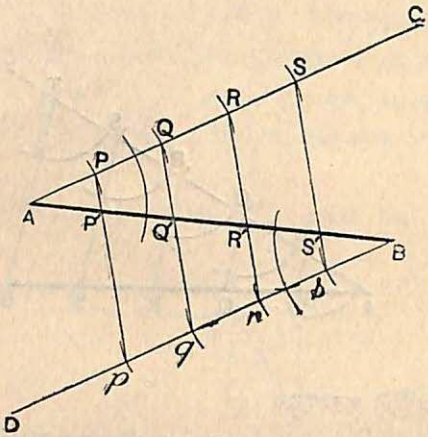
TB যুক্ত কর।

S, R, Q, P বিন্দু দিয়া TB-র সমান্তরাল করিয়া চারিটি সরলরেখা টান। মনে কর এই সরলরেখাগুলি BA-কে যথাক্রমে S′, R′, Q′, P′ বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে AB সরলরেখা P′, Q′, R′, S′ বিন্দুসমূহে পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত হইল।

দ্রষ্টব্য। সম্পাদ্যের চিত্রে $AP' = \frac{1}{5}AB$, $AQ' = \frac{2}{5}AB$, $AR' = \frac{3}{5}AB$ এবং $AS' = \frac{4}{5}AB$. সুতরাং এই সম্পাদ্যের অঙ্কন প্রণালী অবলম্বনে কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার যে কোন নির্দিষ্ট অংশ নির্ণয় করা যায়।

দ্বিতীয় প্রণালী। AB সরলরেখার সহিত যে কোন কোণ করিয়া AC সরলরেখা টান। AC-র সমান্তরাল করিয়া AC-র বিপরীত দিকে BD সরলরেখা টান।



AC হইতে যে কোন দৈর্ঘ্যের চারিটি সমান অংশ AP, PQ, QR, RS কাটিয়া লও।

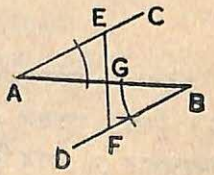
BD হইতে AC-র অংশগুলির সমান করিয়া Bs, sr, rq, qp চারিটি অংশ কাটিয়া লও।

Pp, Qq, Rr, Ss যুক্ত কর। মনে কর এই সরলরেখাগুলি AB-কে যথাক্রমে P′, Q′, R′, S′ বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে AB সরলরেখা P′, Q′, R′, S′ বিন্দুসমূহে পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত হইল।

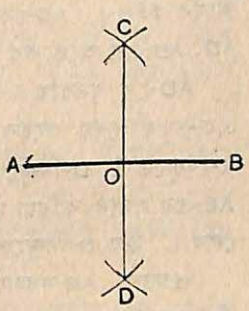
দ্রষ্টব্য। দ্বিতীয় প্রণালীর অঙ্কনে AB-কে যত ভাগ করিতে হইবে, AC ও BD-তে তদপেক্ষা এক কম অংশ লইতে হইবে।

উক্ত প্রণালীতে কোন সরলরেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করা যায়। পার্শ্বের চিত্রে AB সরলরেখাকে G-বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করা হইয়াছে।



সরলরেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করার সহজ প্রণালী প্রদর্শিত হইতেছে।

AB একটি নির্দিষ্ট সীমাবদ্ধ সরলরেখা। ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।



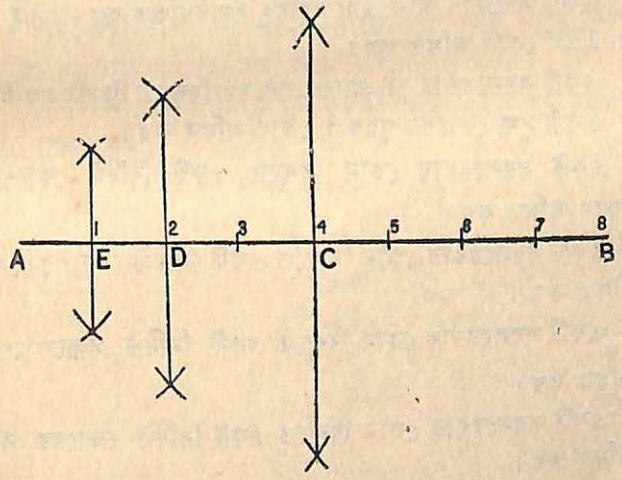
A-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং AB-র অর্ধ অপেক্ষা বড় কোন ব্যাসার্ধ লইয়া AB-র উভয় পার্শ্বে দুইটি চাপ অঙ্কিত কর। আবার B-কে কেন্দ্র করিয়া একই ব্যাসার্ধ লইয়া AB-র উভয় পার্শ্বে এমন দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহারা পূর্বের চাপ দুইটিকে যথাক্রমে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। CD যুক্ত কর। ইহা যেন AB-কে O-বিন্দুতে ছেদ করিল।

এক্ষণে AB সরলরেখা CD সরলরেখা দ্বারা O-বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইল।*

এই প্রণালীতে একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে দুই, চার ও আট সমান-ভাগে বিভক্ত করা যায়।

AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা।

ইহাকে 2, 4 ও 8 সমান ভাগে বিভক্ত করিতে হইবে।



* O-বিন্দুস্থ কোণগুলি মাপিয়া দেখ AB সরলরেখার সমদ্বিখণ্ডক CD সরলরেখা AB-র উপর লম্ব। সুতরাং CD-কে AB-র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক বলা হয়।

AB সরলরেখাকে C-বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। এক্ষণে AC, AB-এর অর্ধেক হইল। AC-কে পুনরায় D-বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। তাহা হইলে AD, AB-এর অর্ধেকের অর্ধেক অর্থাৎ চারিভাগের একভাগ বা চতুর্থাংশ হইল।

AD-কে পুনরায় E- বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। তাহা হইলে AE, AB-এর এক-চতুর্থাংশের অর্ধেক অর্থাৎ আট ভাগের এক ভাগ বা অষ্টমাংশ হইল। E-বিন্দুতে 1, D-বিন্দুতে 2 এবং তারপর কম্পাস দ্বারা DB হইতে যথাক্রমে AE-এর সমান করিয়া দাগ কাটিয়া যাও এবং ছেদ-বিন্দুতে 3, 4, 5, 6, 7 ও 8 লেখ। ঠিক B-বিন্দুতে 8-এর দাগ পড়িবে।

এক্ষণে, AB-সরলরেখা 4-চিহ্নিত বিন্দুতে দুই সমান ভাগে ও 2, 4, 6-চিহ্নিত বিন্দুসমূহে চার সমান ভাগে এবং 1, 2, 3, 4, 5, 6 ও 7-চিহ্নিত বিন্দুসমূহে আট সমানভাগে বিভক্ত হইয়াছে।

বিবিধ অনুশীলনী 11

1, 6 সে. মি. একটি সরলরেখার মধ্যবিন্দুতে একটি লম্ব টান।

2. একটি সমকোণ আঁক এবং ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত কর। এই অঙ্কনের সাহায্যে 135° কোণ অঙ্কিত কর।

3, একটি সরলরেখার দুই প্রান্তে এবং মধ্যবিন্দুতে তিনটি লম্ব টান।

4, একটি সূক্ষ্ম কোণের পূরক † কোণ অঙ্কিত কর।

5. একটি সরলরেখার কোন বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট কোণের অর্ধেক একটি কোণ অঙ্কিত কর।

6. একটি সরলরেখার কোন বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট কোণের দ্বিগুণ একটি কোণ অঙ্কিত কর।

7. একটি সরলরেখার কোন বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট সূক্ষ্মকোণের পূরক কোণ অঙ্কিত কর।

8. একটি সরলরেখার কোন বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট কোণের সম্পূরক † কোণ অঙ্কিত কর।

---

† শিক্ষার্থিগণ ষষ্ঠ শ্রেণীতেই 'পূরক' ও 'সম্পূরক' কোণের সংজ্ঞা শিখিয়াছে। এই বিষয়ের বিস্তারিত আলোচনার জন্য এই পুস্তকের P. 92 দ্রষ্টব্য।

9. 6 সে. মি. দীর্ঘ একটি সরলরেখার দুইপ্রান্তে নির্দিষ্ট দুইটি সূক্ষ্মকোণের সমান দুইটি কোণ অঙ্কিত কর।

10. কোন সরলরেখার উভয় প্রান্তে একই দিকে 45° পরিমিত দুইটি কোণ অঙ্কিত কর। মাপিয়া দেখাও উক্ত কোণদ্বয়ের বাহু মিলিত হইয়া একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।

11. চাঁদার সাহায্যে একটি 60° কোণ অঙ্কিত কর। ইহাকে চারি সমান ভাগে বিভক্ত কর।

12. একাদশ প্রশ্নের অঙ্কনের সাহায্যে একটি সমকোণকে সমান তিন অংশে বিভক্ত কর।

13. একাদশ প্রশ্নের অঙ্কনের সাহায্যে 45° কোণকে সমান তিন অংশে বিভক্ত কর।

14. রুলার ও কম্পাসের সাহায্যে একটি সমকোণ অঙ্কিত করিয়া উহাকে সমান চারি অংশে বিভক্ত কর। প্রত্যেক অংশের পরিমাণ কত ডিগ্রী? মাপিয়া উত্তরের সত্যতা প্রমাণ কর।

15. 7 সে. মি. সরলরেখাকে পাঁচ সমান অংশে বিভক্ত কর এবং মাপিয়া প্রত্যেক অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

16. 6·3 সেন্টিমিটার একটি সরলরেখাকে সাত সমান অংশে বিভক্ত কর এবং মাপিয়া প্রত্যেক অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

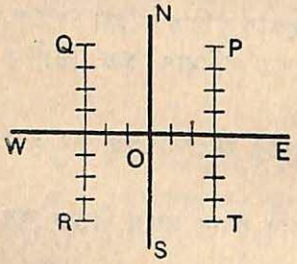
17. একটি সরলরেখা হইতে 5 সে. মি. ব্যবধানে উহার সমান্তরাল একটি সরলরেখা অঙ্কিত কর।

INSTITUTE OF EDUCATION FOR WOMEN
Dept. of Extension SERVICE.
CALCUTTA-17

সপ্তম অধ্যায়

ছক কাগজের ব্যবহার

1. মানচিত্র ব্যবহারের সময় মানচিত্রের উপরের দিক্‌কে উত্তর, নীচের দিক্‌কে দক্ষিণ, ডান দিক্‌কে পূর্ব ও বাম দিক্‌কে পশ্চিম বলিয়া ধরার রীতি আছে। পূর্ব-পশ্চিমে প্রসারিত একটি সরলরেখা ও উত্তর-দক্ষিণে প্রসারিত একটি সরলরেখা পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে। মানচিত্রে পূর্ব-পশ্চিমে প্রসারিত সরলরেখাকে **অনুভূমিক** (Horizontal) এবং উত্তর-দক্ষিণে প্রসারিত সরলরেখাকে **উল্লম্ব** (Vertical) সরলরেখা বলা হয়।



পার্শ্বের চিত্রে EW অনুভূমিক এবং NS উল্লম্ব সরলরেখা দুইটি পরস্পর O-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখন যদি ধরা যায় যে পার্শ্বস্থ চিত্রের প্রত্যেক দাগ এক মিটারের সমান, এবং কোন লোককে যদি বলা হয় যে তাহাকে O-বিন্দু হইতে প্রথমতঃ পূর্ব দিকে 3 মিটার গিয়া তথা হইতে উত্তর দিকে 4 মিটার যাইতে হইবে, তাহা হইলে সে O-বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া OE সরলরেখার বরাবর 3 দাগ গিয়া তথা হইতে উপরের দিকে 4 দাগ যাইবে এবং সে নিশ্চয়ই P-বিন্দুতে পৌঁছিবে।

যদি বলা হয় 3 মিটার পশ্চিমে গিয়া 4 মিটার উত্তরে যাইতে হইবে, তাহা হইলে সে O-বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া OW সরলরেখার বরাবর 3 দাগ গিয়া তথা হইতে উপরের দিকে 4 দাগ যাইবে এবং সে নিশ্চয়ই Q-বিন্দুতে পৌঁছিবে।

এইরূপে সে 3 মিটার পশ্চিমে ও তথা হইতে 4 মিটার দক্ষিণে যাইতে হইলে R-বিন্দুতে এবং 3 মিটার পূর্বে ও তথা হইতে 4 মিটার দক্ষিণে যাইতে হইলে T-বিন্দুতে পৌঁছিবে।

ফলতঃ EW এবং NS এই দুইটি নির্দিষ্ট অসীম সরলরেখার সাহায্যে একই অসীম সমতলে অবস্থিত যে কোন বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করিতে পারা যায়।

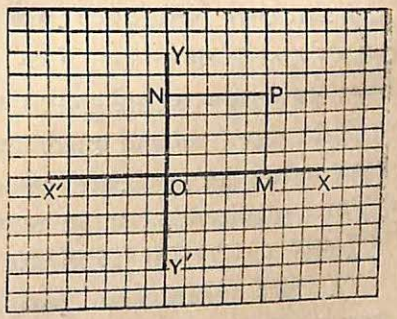
2. **অক্ষ ও মূলবিন্দু**। গণিতশাস্ত্রে এই নির্দিষ্ট সরলরেখা দুইটিকে পূর্ব-পশ্চিমে ও উত্তর-দক্ষিণে প্রসারিত সরলরেখা না বলিয়া প্রত্যেককে অক্ষ (Axis) বলা হয় এবং ইহাদিগকে EW এবং NS নামে নির্দেশ না করিয়া

XX′ এবং YY′ নামে নির্দেশ করা হয়। উহাদের ছেদবিন্দু O-কে **মূলবিন্দু** (Point of Origin) বলা হয়।

তাহা হইলে দেখা যাইতেছে কোনও সমতলে অনুভূমিক ও উল্লম্ব দুইটি সরলরেখা ও তাহাদের ছেদবিন্দুর (মূলবিন্দু) অবস্থান নির্দিষ্ট হইলে, উক্ত সমতলের যে কোন বিন্দুর অবস্থান সহজেই নির্ণয় করা যায়। এরূপ স্থলে অনুভূমিক XX′ সরলরেখাকে x-অক্ষ এবং উল্লম্ব YY′ সরলরেখাকে y-অক্ষ বলা হয়।

3. **ছক কাগজ**। একখণ্ড কাগজের উপর সমদূরবর্তী কতকগুলি অনুভূমিক এবং কতকগুলি উল্লম্ব সরলরেখা অঙ্কিত করিলে সমস্ত কাগজখণ্ড কতিপয় ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত হইবে। এইরূপ বর্গাঙ্কিত কাগজকে **ছক কাগজ** (Squared paper অথবা Graph paper) বলা হয়। ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যকে যে কোন স্কেলে সেন্টিমিটার, মিটার, কিলোমিটার, ইত্যাদি রূপে কল্পনা করা চলে। কোন বিশেষ পরিমাপের উল্লেখ না থাকিলে ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে 'একক' বলিলেও চলিতে পারে। এরূপ স্থলে ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর পাঁচগুণ দীর্ঘ সরলরেখার দৈর্ঘ্য হইবে 5 একক, ছয়গুণ দীর্ঘ সরলরেখার দৈর্ঘ্য হইবে 6 একক, ইত্যাদি। আবার প্রতি ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হইবে 1 বর্গ একক।

4. **ভুজ, কোটি ও স্থানাঙ্ক**। পার্শ্বস্থ ছক কাগজে XX′ এবং YY′ দুইটি অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। এই ছক কাগজের সমতলে যে কোন P-বিন্দু লওয়া হইল। এখন XX′ ও YY′ সরলরেখা দুইটি হইতে P-বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে। P-হইতে XX′ এর উপর PM এবং YY′-এর উপর PN লম্ব টান। এখন PM এবং PN, XX′ ও YY′ হইতে P-বিন্দুর দূরত্ব প্রকাশ করিতেছে।



এই দূরত্বের সাংখ্যমানকে P-বিন্দুর **স্থানাঙ্ক** (Co-ordinates) বলা হয়। চিত্র হইতে দেখা যায় PN = OM. সুতরাং P-বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইলে

P হইতে XX'-এর উপর PM লম্ব টান। তাহা হইলে OM এবং PM-এর দৈর্ঘ্যমান P-বিন্দুর স্থানাঙ্ক। ইহাদের মধ্যে OM হইল P-বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক (x-co-ordinate) বা **ভুজ** (Abscissa) এবং PM হইল P-বিন্দুর y-স্থানাঙ্ক (y-co-ordinate) বা **কোটি** (Ordinate)।

চিত্রে গণনাদ্বারা দেখা যায় P-বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক বা ভুজ 5 একক এবং y-স্থানাঙ্ক বা কোটি 4 একক।

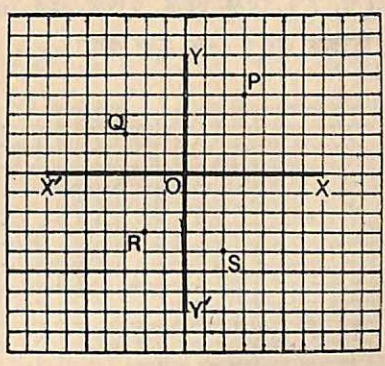
5. **ধনাত্মক ও ঋণাত্মক ভুজ-কোটি**। অক্ষ দুইটির OX ও OY-কে যথাক্রমে x-অক্ষের ও y-অক্ষের ধনাত্মক (Positive) দিক্ এবং OX' ও OY'-কে যথাক্রমে x-অক্ষের ও y-অক্ষের ঋণাত্মক (Negative) দিক্ বলা হইয়া থাকে। O-বিন্দু হইতে ডানদিকে যে কোন বিন্দুর ভুজ ধনাত্মক এবং বামদিকে যে কোন বিন্দুর ভুজ ঋণাত্মক। আবার O-বিন্দু হইতে উপরের দিকে যে কোন বিন্দুর কোটি ধনাত্মক এবং নীচের দিকে যে কোন বিন্দুর কোটি ঋণাত্মক। ছক কাগজে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক দিক্ সম্বন্ধে ইহাই প্রচলিত রীতি।

6. **পাদ**। দুইটি অক্ষ ছক কাগজের সমতলকে চারিটি অংশে বিভক্ত করে; উহাদের প্রত্যেক অংশকে **পাদ** (Quadrant) বলে। XOY, X'OY, X'OY', এবং XOY'-কে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ পাদ বলা হয়।

সুতরাং কোন বিন্দুর ভুজ ও কোটি উভয়ই ধনাত্মক হইলে উক্ত বিন্দু XOY কোণের মধ্যে বা প্রথম পাদে (First quadrant) অবস্থিত হইবে। কোন বিন্দুর ভুজ ঋণাত্মক ও কোটি ধনাত্মক হইলে উক্ত বিন্দু X'OY কোণের মধ্যে বা দ্বিতীয় পাদে (Second quadrant) অবস্থিত হইবে। ভুজ ও কোটি উভয়ই ঋণাত্মক এরূপ যে কোন বিন্দু X'OY' কোণের মধ্যে বা তৃতীয় পাদে (Third quadrant) এবং ভুজ ধনাত্মক ও কোটি ঋণাত্মক এইরূপ যে কোন বিন্দু XOY'-কোণের মধ্যে বা চতুর্থ পাদে (Fourth quadrant) অবস্থিত হইবে।

7. দুইটি সংখ্যা দ্বারা কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক প্রকাশ করা হয়; উহাদের প্রথমটি x-স্থানাঙ্ক বা ভুজ ও দ্বিতীয়টি y-স্থানাঙ্ক বা কোটি প্রকাশ করে। (3,4) এই বিন্দু স্থাপন করিতে হইলে, লক্ষ্য করিতে হইবে নির্ণেয় বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক 3 ও y-স্থানাঙ্ক 4 এবং উভয়ই ধনাত্মক। সুতরাং ক্ষুদ্রতম

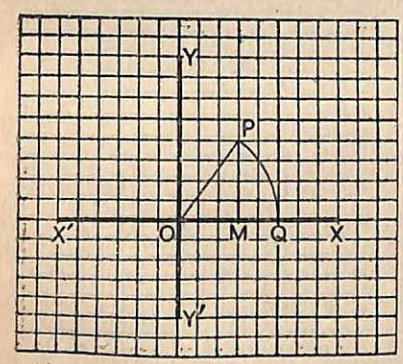
বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক লইয়া OX সরলরেখায় 3 একক এবং তথা হইতে উপরের দিকে 4 একক গণিয়া সেই স্থানে বিন্দু স্থাপন করিলেই (3, 4) বিন্দু স্থাপন করা হইবে। চিত্রে P-বিন্দুর স্থানাঙ্ক। 3, 4)।



(−3,2) বিন্দু অঙ্কিত করিতে হইলে OX′ সরলরেখায় 3 একক এবং তথা হইতে উপরের দিকে 2 একক গণিয়া বিন্দু স্থাপন কর। চিত্রে Q-বিন্দুর স্থানাঙ্ক (−3, 2)। এইরূপে R-বিন্দুর স্থানাঙ্ক (−2,−3) এবং S-বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2,−4)। স্মরণ রাখিবে মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0)।

8. ছক কাগজের ব্যবহার। নিম্নে ছক কাগজের ব্যবহার মূলক কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

উদাহরণ 1. (3, 4) বিন্দু স্থাপন কর এবং মূল-বিন্দু হইতে উহার দূরত্ব নির্ণয় কর।

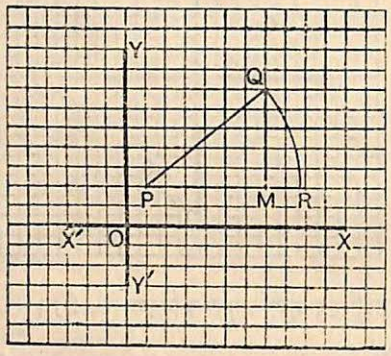


XX′, YY′ অক্ষদ্বয় এবং O মূলবিন্দু ধরিয়া এবং ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া (3, 4) বিন্দু P-চিহ্নিত করা হইল।

O-কে কেন্দ্র করিয়া OP-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যাহা OX-কে Q-বিন্দুতে ছেদ করে। গণনা দ্বারা দেখা যায় OQ = 5 একক। সুতরাং OP = 5 একক।

উদাহরণ 2. (1, 2) ও (7, 7) বিন্দু দুইটি স্থাপন কর এবং উহাদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

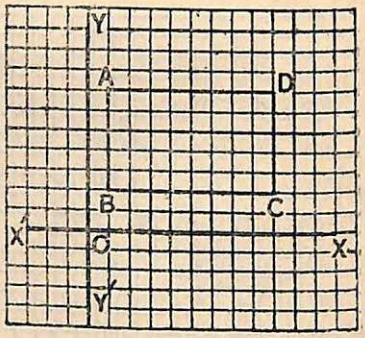
ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া (1, 2) এবং (7, 7) বিন্দু দুইটি স্থাপন কর এবং উহাদিগকে যথাক্রমে P ও Q দ্বারা চিহ্নিত কর। PQ যুক্ত কর।



P-কে কেন্দ্র করিয়া PQ-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যাহা P-বিন্দু দিয়া X-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখাকে R-বিন্দুতে ছেদ করে। গণনা দ্বারা দেখা যায় PR = প্রায় 8।
∴ PQ = 8 একক (স্থূলতঃ)।

ছক কাগজের সাহায্যে ক্ষেত্রফল নির্ণয়

9. আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল। ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুকে একক ধরিয়া A, B, C, D বিন্দুতে (1, 7), (1, 2), (9, 2), (9, 7) বিন্দু চারিটি যথাক্রমে স্থাপন কর। উহাদিগকে যুক্ত করিয়া যে ABCD ক্ষেত্র উৎপন্ন হইল দেখ উহা একটি আয়তক্ষেত্র।



গণনা করিয়া দেখ ABCD আয়তক্ষেত্রের মধ্যে 40-টি ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্র আছে। প্রতি ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 1 একক এবং প্রস্থও 1 একক বলিয়া ইহার ক্ষেত্রফল 1 বর্গ একক। ABCD আয়তক্ষেত্রে এইরূপ 40-টি ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্র আছে বলিয়া উহার ক্ষেত্রফল হইল 40 বর্গ একক।

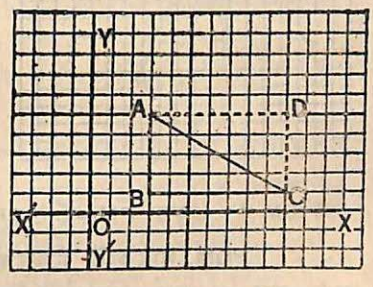
পাটীগণিতে শিখিয়াছ যে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ। চিত্রে দেখ, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য BC = 8 একক এবং প্রস্থ AB = 5 একক; সুতরাং ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 8 × 5 বর্গ একক = 40 বর্গ একক।

ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুকে অর্থাৎ গৃহীত একককে 1 সে. মি. ধরিলে আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল হইবে 40 বর্গ সে. মি., প্রতি বাহুকে অর্থাৎ গৃহীত একককে 1 মিটার ধরিলে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হইবে 40 বর্গ মিটার, ইত্যাদি।

সুতরাং স্মরণ রাখিবে,—

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ।

10. **সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।** (3, 5), (3, 1), (10, 1) বিন্দু তিনটি যথাক্রমে A, B ও C বিন্দুতে স্থাপন কর এবং উহাদিগকে যুক্ত করিয়া যে ত্রিভুজ হইবে দেখ উহা একটি সমকোণী ত্রিভুজ। এই সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত ?



ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধর।

A বিন্দু দিয়া X-অক্ষের সমান্তরাল* এবং C বিন্দু দিয়া Y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা দুইটি টান এবং মনে কর উহাদের ছেদ-বিন্দু D। এখন ABCD একটি আয়তক্ষেত্র হইল। এই আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য BC = 7 একক এবং প্রস্থ AB = 4 একক। সুতরাং ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 7 × 4 বর্গ একক = 28 বর্গ একক।

AC, ABCD আয়তক্ষেত্রের কর্ণ। পূর্বে শিখিয়াছ কর্ণ সামান্তরিককে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

সুতরাং ABC সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধ = 28 বর্গ এককের অর্ধ = 14 বর্গ একক। স্মরণ রাখিবে—

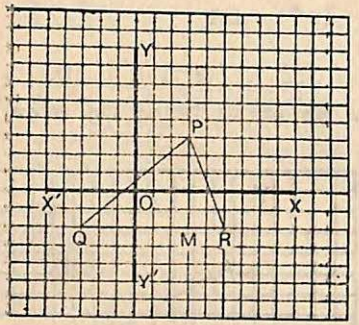
সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল
= অতিভুজ ব্যতীত অপর বাহু দুইটির গুণফলের অর্ধ।

---

*ছক কাগজে সমান্তরাল সরলরেখা টানিতে ও লম্ব আঁকিতে কোনই অসুবিধা নাই। কাগজে যে রেখাগুলি আছে উহাদের বরাবর স্কেল রাখিয়া আবশ্যক মত সমান্তরাল সরলরেখা টানা বা লম্ব আঁকা যায়।

উদাহরণ 3. (3, 3), (−3, −2) ও (5, −2) বিন্দু তিনটি স্থাপন কর এবং উহাদিগকে যুক্ত করিয়া যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক লইয়া (3, 3), (−3, −2) ও (5, −2) বিন্দু তিনটি স্থাপন কর এবং উহাদিগকে যথাক্রমে P, Q, R দ্বারা চিহ্নিত কর। PQ, QR, PR যুক্ত কর।



PQR একটি ত্রিভুজ হইল। এই ত্রিভুজের QR বাহুটি ছক কাগজে অঙ্কিত X-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখার সহিত মিশিয়া গিয়াছে। এখন P হইতে QR এর উপর PM লম্ব টান (স্কেল দিয়া ছক কাগজে অঙ্কিত সরলরেখার বরাবর রেখা টানিলেই হইবে)। সুতরাং PQM ও PRM ত্রিভুজ দুইটির প্রত্যেকটিই সমকোণী ত্রিভুজ হইল। গণনা করিয়া দেখ QM = ৫ একক, PM = 5 একক এবং MR = 2 একক।

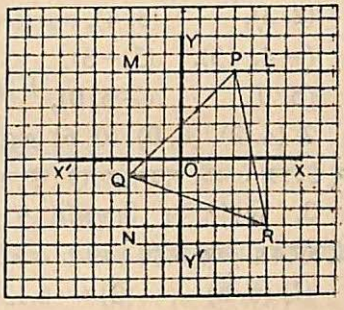
∴ PQM সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $(6 \times 5) \times \frac{1}{2}$ বর্গ একক = 15 বর্গ একক এবং PRM সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $(5 \times 2) \times \frac{1}{2}$ বর্গ একক = 5 বর্গ একক।

যেহেতু PQM ত্রিভুজ ও PRM ত্রিভুজ একত্র করিলে PQR ত্রিভুজ হয়, সুতরাং PQR ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = 15 বর্গ একক + 5 বর্গ একক = 20 বর্গ একক।

উদা 4. (3,5), (−3, −1) এবং (5, −4) বিন্দু তিনটি স্থাপন করিয়া উহাদিগকে পরস্পর যুক্ত করিলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া (3, 5), (−3, −1) এবং (5−4) বিন্দু তিনটি স্থাপন কর। উহাদিগকে যথাক্রমে P, Q, R দ্বারা চিহ্নিত কর। PQ, QR, RP যুক্ত কর। PQR একটি ত্রিভুজ হইল। এই ত্রিভুজের কোন বাহুই ছক কাগজে অঙ্কিত কোন সরলরেখার সহিত মিশিয়া যায় নাই।

P ও R বিন্দু দিয়া X-অক্ষের এবং Q ও R বিন্দু দিয়া Y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা চারিটি অঙ্কিত কর এবং মনে কর উহারা যেন LMNR আয়তক্ষেত্র উৎপন্ন করিল।



LPR, MPQ এবং NQR ত্রিভুজ তিনটির প্রত্যেকটিই সমকোণী ত্রিভুজ। গণিয়া দেখ, LP = 2 একক, LR = 9 একক ;

∴ LPR সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $(2\times 9)\times\frac{1}{2}=9$ বর্গ একক।

MP = 6 একক, MK = 6 একক ;

∴ MPQ সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $(6\times 6)\times\frac{1}{2}=18$ বর্গ একক।

NQ = 3 একক, NR = 8 একক ;

∴ NQR সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $(3\times 8)\times\frac{1}{2}=12$ বর্গ একক।

NR = 8 একক এবং MN = 9 একক, সুতরাং LMNR আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 8×9 বর্গ একক = 72 বর্গ একক।

∴ PQR ত্রিভুজ

= আয়তক্ষেত্র LMNR − LPR ত্রিভুজ − MPQ ত্রিভুজ − NQR ত্রিভুজ।

∴ PQR ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = (72 − 9 − 18 − 12) বর্গ একক = 33 বর্গ একক।

যে কোন ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইলে ক্ষেত্রের মধ্যে যতগুলি ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্র আছে (ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুকে একক ধরা হইলে) তাহার সংখ্যা নির্ণয় কর। অতঃপর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের যে যে অংশ অর্ধেক বা অর্ধেকের বেশী তাহা গণনা করিয়া সংখ্যা নির্ণয় কর। এই দুই সংখ্যার সমষ্টি যত ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল তত বর্গ একক হইবে। এই প্রক্রিয়ায় ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের অর্ধাংশ বা অর্ধাংশের বেশীকে পুরা বর্গ একক ধরা হয় এবং অর্ধাংশের কমকে আদৌ ধরা হয় না।

এই প্রকার হিসাবে ক্ষেত্রফলের সঠিক উত্তর হয় না—মোটামুটি উত্তর হয় মাত্র।

অনুশীলনী 12

1. ছক কাগজে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি স্থাপন কর :

$(2, 3)$, $(3, 4)$, $(5, 6)$, $(-2, 3)$, $(-4, 5)$, $(-4, -5)$, $(5, -3)$, $(7, -8)$, $(0, 10)$, $(0, -6)$, $(5, 0)$, $(-5, 0)$, $(-2, 3)$, $(8, -2)$, $(0, 0)$।

2. $(4, 2)$, $(6, 0)$, $(0, 6)$ এবং $(-2, 8)$ বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া দেখাও যে উহারা একই সরলরেখার উপর অবস্থিত।

3. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি স্থাপন কর এবং মূলবিন্দু হইতে উহাদের প্রত্যেকের দূরত্ব নির্ণয় কর :

(1) $(6, 8)$ (2) $(-5, 12)$ (3) $(-4, -3)$ (4) $(3, -6)$

4. নিম্নলিখিত দুই দুইটি বিন্দু স্থাপন করিয়া উহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর :

(1) $(1, 2)$ ও $(4, 6)$ (2) $(-2, 7)$ ও $(-10, 1)$

(3) $(-6, 0)$ ও $(-3, -5)$।

5. নিম্নলিখিত চারিটি বিন্দু স্থাপন কর এবং উহাদিগকে পর পর সংযুক্ত করিয়া যে আয়তক্ষেত্র উৎপন্ন হয় তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

$(-2, 2)$, $(-2, -3)$, $(6, -3)$, $(6, 2)$।

6. নিম্নলিখিত বিন্দু চারিটি স্থাপন কর এবং উহাদিগকে পর পর সংযুক্ত করিয়া যে বর্গক্ষেত্র উৎপন্ন হয় তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

$(-4, -3)$, $(-4, -8)$, $(1, -8)$, $(1, -3)$।

7. প্রত্যেক সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, যাহার শীর্ষবিন্দু :

(1) $(0, 0)$, $(0, 5)$, $(10, 0)$ (2) $(2, 3)$, $(2, 1)$, $(8, 1)$

(3) $(-4, 2)$, $(-4, -3)$, $(3, -3)$ (4) $(7, 3)$, $(7, -1)$, $(0, -1)$।

8. প্রত্যেক ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যাহার শীর্ষবিন্দু :

(1) $(3, 4)$ $(-4, -1)$, $(5, -1)$ (2) $(0, 1)$, $(0, 6)$, $(4, 4)$

(3) $(0, 0)$, $(-4, 4)$, $(2, 4)$ (4) $(-3, 2)$, $(-2, -3)$, $(6, 2)$।

9. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির সংযোগ দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

(1) $(-1, -1)$, $(3, 2)$, $(6, -2)$ (2) $(1, 4)$, $(2, 1)$, $(-4, -2)$

(3) $(1, 0)$, $(3, -4)$, $(-4, 2)$ (4) $(4, 4)$, $(-6, -2)$, $(9, -3)$।

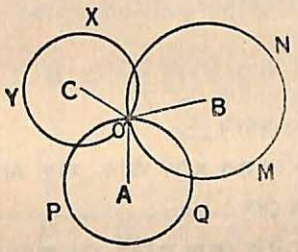
অষ্টম শ্রেণীর পাঠ্যাংশ

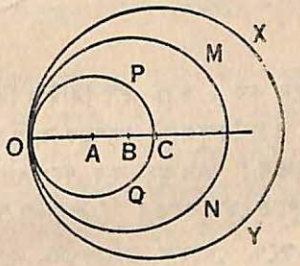
অষ্টম অধ্যায়

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা

1. বৃত্তাঙ্কন।

(a) কোন নির্দিষ্ট বিন্দু-গামী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।





মনে কর O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

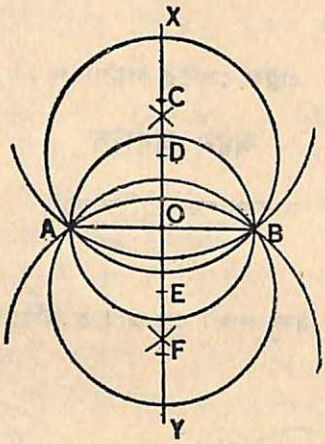
O বিন্দুগামী বৃত্তসমূহ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। যে কোন A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া AO ব্যাসার্ধ লইয়া OPQ একটি বৃত্ত আঁক। উহাই অভীষ্ট বৃত্ত।

এই ভাবে যে কোন B, C ইত্যাদি বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া BO, CO ইত্যাদি ব্যাসার্ধ লইয়া OMN, OXY প্রভৃতি বৃত্ত অঙ্কন করিলেও উহাদের প্রত্যেকটিই অভীষ্ট বৃত্ত হইবে।

দ্রষ্টব্য। একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া অসংখ্য বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে।

(b) দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।



মনে কর A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

A ও B বিন্দুগামী বৃত্তসমূহ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB যুক্ত কর এবং AB-র লম্ব-দ্বিখণ্ডক XOY আঁক, যাহা AB-কে O বিন্দুতে ছেদ করে। (প্রণালী 59 পৃষ্ঠায় দেখ।)

এক্ষণে, যেহেতু OA = OB, সুতরাং O-কে কেন্দ্র করিয়া OA অথবা OB ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে ঐ বৃত্ত A ও B বিন্দু দিয়া যাইবে।

এইভাবে AB-র যে কোন দিকে XY-এর উপর যে কোন C, D, E, F প্রভৃতি বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া CA, DA, EA, FA ইত্যাদি ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহাদের প্রত্যেক বৃত্তই A ও B বিন্দু দিয়া যাইবে।

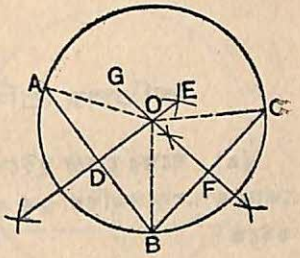
স্কেলদ্বারা মাপিলে দেখা যাইবে $\begin{cases} CA = CB & EA = EB \\ DA = DB & FA = FB \end{cases}$

XY সরলরেখার উপর যে কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং ঐ বিন্দু হইতে A বা B পর্যন্ত দূরত্বের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কন করিলে উহা A ও B বিন্দু দিয়া যাইবে।

দ্রষ্টব্য। A ও B বিন্দুগামী অসংখ্য বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পরে।

(c) একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে এইরূপ তিনটি বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

A, B, C তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু যাহারা এক সরলরেখায় অবস্থিত নহে।



উক্ত তিনটি বিন্দুর মধ্য দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB, BC যুক্ত কর।

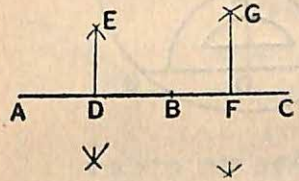
AB ও BC-কে যথাক্রমে DE ও FG দ্বারা লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

মনে কর DE, FG পরস্পর O-বিন্দুতে ছেদ করিল।

O-কে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

উহাই A, B, C-বিন্দুগামী অভীষ্ট বৃত্ত। স্কেলদ্বারা মাপিয়া দেখ OA = OB = OC

A, B, C বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হইলে অঙ্কন অসম্ভব।



কারণ, সেই ক্ষেত্রে AB ও BC-র লম্ব-দ্বিখণ্ডক DE এবং FG পরস্পর সমান্তরাল হইবে, সুতরাং উহারা কখনও মিলিত হইবে না এবং A, B, C হইতে সমান দূরে অবস্থিত কোন বিন্দু পাওয়া যাইবে না। এইরূপ ক্ষেত্রে বৃত্ত অঙ্কন অসম্ভব হইবে।

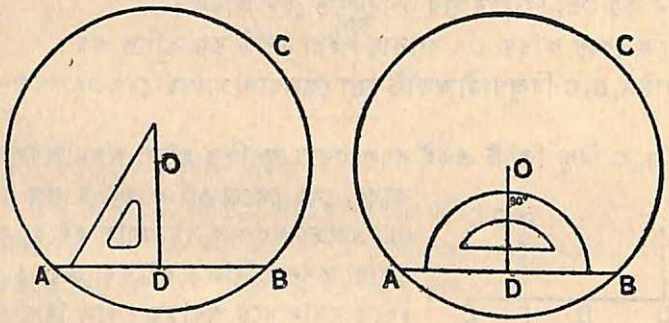
অনুশীলনী 13

1. A বিন্দু দিয়া 2 সে.মি, 4 সে.মি., 5 সে. মি. ব্যাসার্ধের তিনটি বৃত্ত আঁক।
2. A বিন্দু দিয়া 3, 3·5 এবং 4 সে. মি. ব্যাসার্ধের তিনটি বৃত্ত আঁক।
3. A এবং B দুইটি বিন্দু 4 সে. মি. ব্যবধানে অবস্থিত। ঐ দুইটি বিন্দুর মধ্য দিয়া চারিটি বৃত্ত আঁক। প্রত্যেক বৃত্তের ব্যাসার্ধের পরিমাণ মাপিয়া স্থির কর।
4. A ও B দুইটি বিন্দু 4·8 সে. মি. ব্যবধানে অবস্থিত; A ও B বিন্দুগামী ক্ষুদ্রতম বৃত্তটি আঁক। ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত?
5. A ও B বিন্দু দুইটি 4 সে. মি. ব্যবধানে অবস্থিত। ঐ দুইটি বিন্দু দিয়া 4 সে. মি. ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। ঐরূপ বৃত্ত কয়টি অঙ্কন সম্ভব?

নবম অধ্যায়

কতিপয় প্রতিজ্ঞার ব্যবহারিক প্রমাণ

(a) বৃত্তের কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত কোন সরলরেখা ব্যাস নহে এমন কোন জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে, উক্ত সরলরেখা ঐ জ্যা-এর উপর লম্ব হইবে।



মনে কর, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AB একটি জ্যা যাহা ব্যাস নহে।

স্কেল দ্বারা মাপিয়া অথবা সরলরেখা দ্বিখণ্ডনের নিয়মে AB-কে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর এবং OD যোগ কর।

এখন OD, AB-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিল।

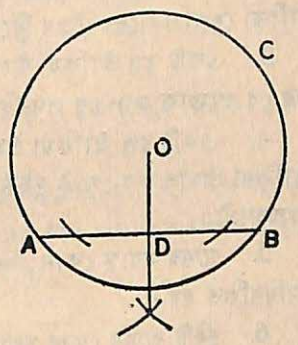
প্রমাণ করিতে হইবে যে OD, AB-র উপর লম্ব।

এখন চাঁদার সাহায্যে অথবা সেট্‌স্কোয়ারের সাহায্যে মাপিয়া দেখ $\angle ODA$ এবং $\angle ODB$-এর প্রত্যেকটি সমকোণ। সুতরাং OD, AB-র উপর লম্ব।

দ্রষ্টব্য। কয়েকটি বৃত্ত আঁকিয়া উহাতে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের জ্যা স্থাপন কর এবং প্রত্যেক জ্যা-এর মধ্যবিন্দু চিহ্নিত করিয়া কেন্দ্রের সহিত যুক্ত কর। চাঁদা বা সেট্‌স্কোয়ার দ্বারা মাপিলে দেখিতে পাইবে উক্ত কেন্দ্রযোজক সরলরেখা জ্যা-এর মধ্যবিন্দুতে সমকোণ উৎপন্ন করিয়াছে অর্থাৎ উহা জ্যা-এর মধ্যবিন্দুতে জ্যা-এর উপর লম্ব হইয়াছে।

(b) বৃত্তের কেন্দ্র হইতে ব্যাস ভিন্ন অপর কোন জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব উক্ত জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

যে কোন একটি বৃত্ত আঁকিয়া উহাতে AB জ্যা স্থাপন কর এবং বৃত্তের কেন্দ্র O চিহ্নিত কর। O-বিন্দু হইতে AB-র উপর OD লম্ব টান।

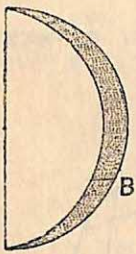


এখন স্কেল দ্বারা মাপিয়া দেখ AD = BD.

অর্থাৎ কেন্দ্র O হইতে AB জ্যা-এর উপর লম্ব OD, AB-কে D-বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

এইভাবে কয়েকটি বৃত্ত আঁকিয়া প্রত্যেক বৃত্তে এক বা একাধিক জ্যা স্থাপন কর। বৃত্তের কেন্দ্র হইতে প্রত্যেক জ্যা-এর উপর লম্ব টান।

মাপিয়া দেখ প্রত্যেক লম্বই জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।



দ্বিতীয় প্রণালী। একখণ্ড ছোট কাগজে একটি বৃত্ত আঁকিয়া উহাতে AB একটি জ্যা এবং কেন্দ্র O হইতে AB-র উপর OD লম্ব আঁক।

এখন, কাগজখানিকে OD-র বরাবর ভাঁজ কর, দেখিবে AD সরলরেখা DB সরলরেখার সহিত মিলিয়া যাইবে এবং A-বিন্দু ঠিক B-বিন্দুর উপর পড়িবে।

ইহা হইতে বুঝিতে পারা যাইতেছে যে লম্ব OD, AB জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অনুশীলনী 14

1. 3 সে. মি. ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক এবং উহাতে 4·2 সে.মি. একটি জ্যা আঁক। ঐ জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সহিত কেন্দ্র যোগ কর। চাঁদা বা সেট্- স্কোয়ারের সাহায্যে দেখাও যে জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সহিত কেন্দ্র-যোজক সরলরেখা জ্যা-এর উপর লম্ব।

2. 3 সে. মি. ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক এবং উহাতে 4 সে. মি. একটি জ্যা স্থাপন কর। বৃত্তের কেন্দ্র হইতে ঐ জ্যা-এর উপর একটি লম্ব টান। মাপিয়া দেখাও লম্বের উভয় দিকে জ্যা-এর অংশ দুইটি সমান।

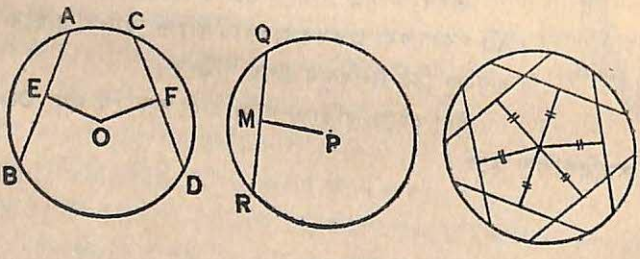
3. একটি বৃত্ত আঁকিয়া উহাতে কয়েকটি জ্যা স্থাপন কর। আঁকিয়া প্রমাণ কর যে প্রত্যেক জ্যা-এর লম্ব-দ্বিখণ্ডকই বৃত্তের কেন্দ্রগামী।

4. একটি বৃত্ত আঁকিয়া উহাতে দুইটি সমান্তরাল জ্যা স্থাপন কর। এখন, আঁকিয়া প্রমাণ কর যে ঐ দুইটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু-যোজক সরলরেখা বৃত্তের কেন্দ্রগামী।

5. বৃত্তের মধ্যস্থ কোন বিন্দু দিয়া একটি জ্যা আঁক যাহা ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

6. দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র যথাক্রমে O এবং P এবং উহারা পরস্পর A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AB-র মধ্যবিন্দু C. OC এবং PC যোগ করিয়া দেখাও যে OC এবং PC একই সরলরেখায় অবস্থিত।

(c) **একই বৃত্তে (অথবা সমান সমান বৃত্তে) সমান সমান জ্যা-সমূহ কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।**



একটি বৃত্ত আঁকিয়া O-দ্বারা উহার কেন্দ্র সূচিত কর। ঐ বৃত্তে AB, CD দুইটি সমান জ্যা আঁক। O হইতে AB-র উপর OE এবং CD-র উপর OF লম্ব টান।

তাহা হইলে OE, OF, O-কেন্দ্র হইতে AB এবং CD জ্যা-এর দূরত্ব হইল। স্কেল বা কাঁটা কম্পাস দ্বারা মাপিয়া দেখ OE = OF.

আরও কয়েকটি ছোট বড় বৃত্ত আঁকিয়া প্রত্যেক বৃত্তে দুই বা ততোধিক সমান জ্যা স্থাপন কর। কেন্দ্র হইতে প্রত্যেক জ্যা-এর উপর লম্ব টান।

মাপিয়া দেখ কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত প্রত্যেক জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য সমান।

ইহা হইতে এইরূপ সিদ্ধান্ত করা যায় যে একই বৃত্তের সমান সমান জ্যা-সমূহ কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

পুনরায় প্রথম বৃত্তের সমান করিয়া আর একটি বৃত্ত আঁক। মনে কর দ্বিতীয় বৃত্তের কেন্দ্র P। AB বা CD-র সমান করিয়া এই বৃত্তে QR একটি জ্যা স্থাপন কর এবং P হইতে ঐ জ্যা-এর উপর PM লম্ব টান।

মাপিয়া দেখ PM = OE = OF.

প্রথম বৃত্তের সমান আরও কয়েকটি বৃত্ত আঁকিয়া প্রত্যেক বৃত্তে AB-র সমান এক বা একাধিক জ্যা স্থাপন কর এবং প্রত্যেক জ্যা-এর উপর কেন্দ্র হইতে লম্ব টান।

মাপিয়া দেখ উক্ত লম্বগুলির প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্যই OE-র সমান।

সুতরাং, ইহা হইতে এইরূপ সিদ্ধান্ত করা যায় যে সমান সমান বৃত্তের সমান সমান জ্যা-সমূহ কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

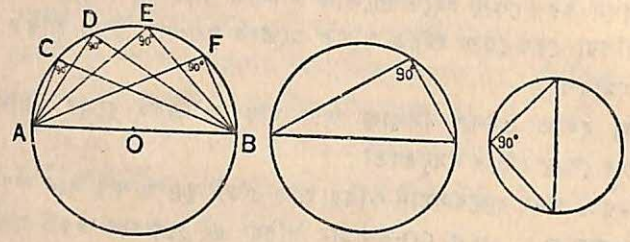
অনুশীলনী 15

1. 3·6 সে. মি. ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক এবং উহাতে 4·8 সে. মি. দীর্ঘ দুইটি জ্যা স্থাপন কর। কেন্দ্র হইতে উহাদের দূরত্ব মাপিয়া নির্ণয় কর।

2, 3·3 সে. মি. ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক এবং উহাতে 3·6 সে. মি. দীর্ঘ পাঁচটি জ্যা স্থাপন কর। প্রত্যেক জ্যা-এর মধ্যবিন্দু চিহ্নিত কর। পরীক্ষা করিয়া দেখ ঐ মধ্যবিন্দুগুলির ভিতর দিয়া একটি বৃত্ত আঁকা যায় কিনা।

3. 4 সে. মি ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। উহাতে 3 সে. মি. এবং 5 সে. মি. দীর্ঘ দুইটি জ্যা স্থাপন কর। কেন্দ্র হইতে উভয় জ্যা-এর উপর লম্ব টান। মাপিয়া স্থির কর কোন্ জ্যা-টি কেন্দ্রের অধিকতর নিকটবর্তী। ইহা হইতে কিরূপ সিদ্ধান্ত করা যাইতে পারে?

(d) অর্ধবৃত্তাংশস্থ কোণ সমকোণ।



যে কোন একটি বৃত্ত আঁক। মনে কর O উহার কেন্দ্র। AOB একটি ব্যাস আঁক। তাহা হইলে AOB এই ব্যাস দ্বারা বৃত্তটি দুইটি সমান বৃত্তাংশে বা দুইটি অর্ধবৃত্তে বিভক্ত হইল।

এখন AOB ব্যাসের একই পার্শ্বে পরিধির উপর C, D, E, F প্রভৃতি কয়েকটি বিন্দু লইয়া A ও B-র সহিত প্রত্যেক বিন্দু যোগ কর। তাহা হইলে ∠ACB, ∠ADB, ∠AEB, ∠AFB-এর প্রত্যেকটিকে অর্ধবৃত্তাংশস্থ কোণ বলা যাইতে পারে।

চাঁদার সাহায্যে মাপিয়া দেখ C, D, E, F বিন্দুস্থ প্রত্যেকটি কোণ এক সমকোণ।

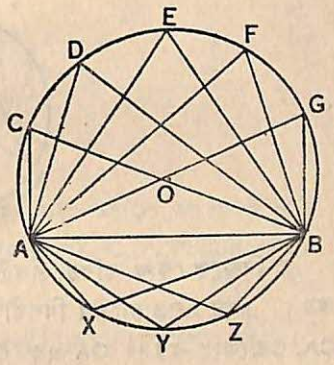
প্রথম বৃত্তের অনুরূপ একটি বৃত্ত আঁকিয়া অপর বৃত্তাংশে (AB-র নীচের দিকে) পরিধির উপর X, Y, Z, প্রভৃতি বিন্দু লইয়া প্রত্যেক বিন্দু A ও B-র সহিত যুক্ত করিয়া মাপিয়া দেখ X, Y, Z, প্রভৃতি বিন্দুস্থ কোণগুলির প্রত্যেকটিই এক সমকোণ।

ছোট বড় আরও কয়েকটি বৃত্ত আঁকিয়া পরীক্ষা করিয়া দেখ প্রত্যেক বৃত্তেই অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।

সুতরাং এইরূপ সিদ্ধান্ত করা যায় যে—অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণের সমান।

(e) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ সূক্ষ্মকোণ এবং অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ স্থূলকোণ।

O বিন্দুকে কেন্দ্র লইয়া একটি বৃত্ত আঁক এবং AB একটি জ্যা দ্বারা উহাকে দুইটি অসমান অংশে বিভক্ত কর। (ব্যাস ভিন্ন যে কোন জ্যা দ্বারা বৃত্তটি দুইটি অসমান অংশে বিভক্ত হইবে।)



মনে কর AEB বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর এবং AYB বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

AEB বৃত্তাংশের চাপে C, D, E, F, G, কয়েকটি বিন্দু লইয়া A ও B-র সহিত প্রত্যেক বিন্দু যোগ কর। আবার AYB বৃত্তাংশের চাপে X, Y, Z, কয়েকটি বিন্দু লইয়া A ও B-র সহিত প্রত্যেক বিন্দু যোগ কর।

এখন চাঁদার সাহায্যে মাপিয়া দেখ $\angle ACB$, $\angle ADB$, $\angle AEB$, $\angle AFB$, $\angle AGB$-এর প্রত্যেকটিই এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অর্থাৎ সূক্ষ্মকোণ এবং $\angle AXB$, $\angle AYB$, $\angle AZB$-এর প্রত্যেকটিই এক সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর অর্থাৎ স্থূলকোণ।

সুতরাং পরীক্ষা দ্বারা এইরূপ সিদ্ধান্ত করা যায় যে—অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ সূক্ষ্মকোণ এবং অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ স্থূলকোণ।

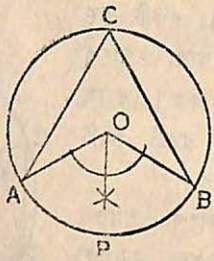
দ্রষ্টব্য। অনুরূপ চিত্র খাতায় বড় করিয়া আঁকিয়া লইলে চাঁদা দ্বারা কোণ পরিমাণ করার সুবিধা হইবে।

অনুশীলনী 16

1. 2 সে. মি. ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত আঁকিয়া উহাতে 3 সে. মি. দীর্ঘ একটি জ্যা স্থাপন কর। জ্যা-এর উভয় দিকে পরিধির উপর তিনটি করিয়া বিন্দু লইয়া A ও B-র সহিত যোগ কর। প্রত্যেক কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর এবং কোন্‌গুলি সূক্ষ্মকোণ এবং কোন্‌গুলি স্থূলকোণ স্থির কর।

2. (e)-উপপাদ্যের চিত্রে $\angle D+\angle X$, $\angle E+\angle Y$, $\angle F+\angle Z$-এর সমষ্টি কত ডিগ্রী নির্ণয় কর।

(f) বৃত্তের একই চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ।



O-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া একটি বৃত্ত আঁক এবং APB একটি চাপ চিহ্নিত কর। এখন APB চাপের বিপরীত দিকে পরিধির উপর C একটি বিন্দু লইয়া CA, CB যোগ কর। OA এবং OB যোগ কর।

তাহা হইলে, একই চাপ APB-র উপর অবস্থিত AOB কেন্দ্রস্থ কোণ এবং ACB পরিধিস্থ কোণ হইল।

এখন চাঁদা দ্বারা মাপিয়া ACB এবং AOB কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর। দেখ AOB কোণের পরিমাণ ACB কোণের দ্বিগুণ।

AOB কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া দেখ, প্রত্যেক অংশ ACB কোণের সমান। ইহা হইতেও বুঝা যাইতেছে যে, $\angle AOB$, $\angle ACB$-এর দ্বিগুণ।

কয়েকটি বৃত্ত আঁকিয়া একই চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ ও পরিধিস্থ কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

লক্ষ্য করিয়া দেখ প্রত্যেক বৃত্তেই কেন্দ্রস্থ কোণটি পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ।

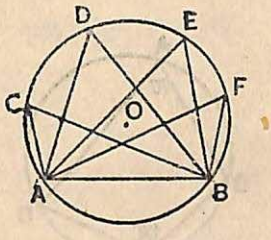
সুতরাং উক্ত পরীক্ষা হইতে এইরূপ সিদ্ধান্ত করা যায় যে—বৃত্তের একই চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ।

অনুশীলনী 17

1. একটি বৃত্ত আঁকিয়া উহার কেন্দ্রে 120° একটি কোণ আঁক। এই কোণের বাহু দুইটি দ্বারা ছিন্ন চাপের উপর অবস্থিত শীর্ষবিন্দুর দিকে পরিধিতে যে কোন একটি কোণ আঁক। পরিধিস্থ কোণের পরিমাণ কত?

2. একটি বৃত্ত আঁকিয়া পরিধিস্থ C-বিন্দুতে বৃত্তের ভিতরে ACB একটি 45° কোণ আঁক; CA এবং CB পরিধিকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। O, বৃত্তের কেন্দ্র হইলে, AOB কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

(g) **বৃত্তের একই বৃত্তাংশস্থ কোণগুলি পরস্পর সমান।**



O-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া একটি বৃত্ত আঁক এবং উহাতে AB একটি জ্যা স্থাপন কর। AB-র একই দিকে পরিধির উপর C, D, E, F, বিন্দুতে ACB, ADB, AEB, AFB, কয়েকটি কোণ আঁক।

তাহা হইলে ACB, ADB, AEB, AFB কোণগুলি একই বৃত্তাংশস্থ কোণ।

চাঁদা দ্বারা মাপিয়া উক্ত কোণগুলির প্রত্যেকের পরিমাণ স্থির কর। দেখ প্রত্যেক কোণের পরিমাণ সমান।

অর্থাৎ $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB = \angle AFB$.

আরও কয়েকটি বৃত্ত আঁকিয়া একই বৃত্তাংশে কয়েকটি কোণ আঁকিয়া দেখ উহারা পরস্পর সমান।

সুতরাং উক্ত পরীক্ষা হইতে এইরূপ সিদ্ধান্ত করা যায় যে—একই বৃত্তাংশস্থ কোণগুলি পরস্পর সমান।

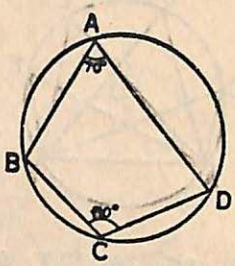
অনুশীলনী 18

1. AB, CD দুইটি জ্যা X-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি $\angle XAC = 32°$, $\angle XCA = 40°$ হয়, তাহা হইলে $\angle XBD$, $\angle XDB$ কোণ দুইটির পরিমাণ কত?

2. কোন বৃত্তের কেন্দ্র O এবং পরিধির উপর তিনটি বিন্দু A, B, C এইরূপে অবস্থিত যে $\angle BAC = 80°$; $\angle BOC$ কত ডিগ্রী?

সংজ্ঞা। বৃত্তমধ্যস্থ কোন চতুর্ভুজের কৌণিক বিন্দু চারিটি পরিধির উপর অবস্থিত হইলে ঐ চতুর্ভুজকে বৃত্তের অন্তর্লিখিত বা বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ বলা হয়।

(h) বৃত্তের অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক।



যে কোন একটি বৃত্ত আঁকিয়া উহাতে AB একটি জ্যা স্থাপন কর। BA সরলরেখায় A-বিন্দুতে $\angle BAD = 70°$ আঁক ; AD যেন পরিধিকে D বিন্দুতে ছেদ করে। A-র বিপরীত দিকে পরিধির উপর C একটি বিন্দু লও। BC, CD যোগ কর। এখন ABCD একটি বৃত্তের অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ হইল।

এখন, চাঁদা দ্বারা মাপিয়া দেখ $\angle BCD = 110°$

সুতরাং $\angle BAD + \angle BCD = 70° + 110° = 180°$

এইরূপে মাপিয়া দেখ, $\angle ABC + \angle ADC = 180°$

আরও কয়েকটি বৃত্ত আঁকিয়া প্রত্যেক বৃত্তে একটি করিয়া অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ আঁক। প্রত্যেক চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের পরিমাণ নির্ণয় করিয়া দেখ উহাদের সমষ্টি 180° হয় কিনা। দেখিবে প্রত্যেক স্থলেই বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত দুই কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান। মাপ নির্ভুল না হইলে অতি সামান্য ব্যতিক্রম হইতে পারে।

উক্ত পরীক্ষা হইতে এইরূপ সিদ্ধান্ত করা যায় যে—বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক।

অনুশীলনী 19

1. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ যাহার $\angle A = 75°$, $\angle B = 80°$, $\angle C$ এবং $\angle D$-এর পরিমাণ নির্ণয় কর।

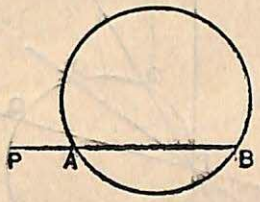
2. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ যাহার CD বাহু E পর্যন্ত বর্ধিত হইয়াছে। চাঁদা দ্বারা মাপিয়া দেখাও $\angle ABC = \angle ADE$.

দশম অধ্যায়

বৃত্তের স্পর্শক

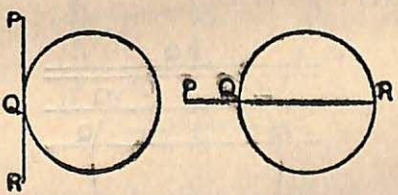
(a) বৃত্তের ছেদক ও স্পর্শক।

কোন অনির্দিষ্ট সীমাবিশিষ্ট সরলরেখা বৃত্তপরিধিকে দুই বিন্দুতে ছেদ করিলে তাহাকে **ছেদক** (Secant) বলে। চিত্রে PAB একটি ছেদক।



ছেদক প্রকৃতপক্ষে বর্ধিত জ্যা। জ্যা পরিধি দ্বারা সীমাবদ্ধ, কিন্তু ছেদক পরিধির বাহিরে যে কোন বিন্দু পর্যন্ত প্রসারিত হইতে পারে।

যে সরলরেখা বৃত্তের পরিধিকে একটিমাত্র বিন্দুতে স্পর্শ করিয়া থাকেএবং বর্ধিত হইয়াও পুনরায় পরিধিকে স্পর্শ বা ছেদ করিতে পারে না, তাহাকে বৃত্তের **স্পর্শক** (Tangent) বলে।

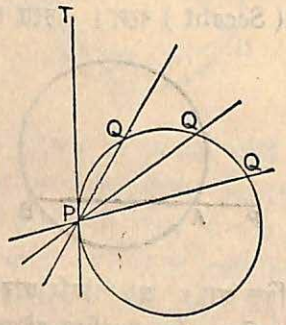


প্রথম চিত্র দ্বিতীয় চিত্র

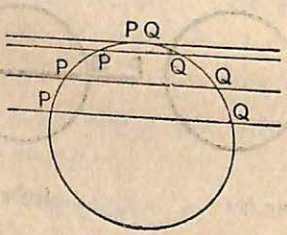
প্রথম চিত্রে PQ স্পর্শক, কিন্তু দ্বিতীয় চিত্রে PQ আপাততঃ বৃত্তটিকে Q-বিন্দুতে স্পর্শ করিয়া থাকিলেও বর্ধিত হইলে উহা পরিধিকে পুনরায় R বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে। এইজন্য দ্বিতীয় চিত্রে PQ স্পর্শক নহে।

ছেদক ও স্পর্শক পৃথক হইলেও ছেদককে একটি গতিশীল সরলরেখা কল্পনা করিলে, কোন বিশেষ অবস্থানে ছেদকটি স্পর্শকে পরিণত হয়।

চিত্রে PQ একটি ছেদক। P-বিন্দু স্থির রাখিয়া PQ ছেদকটিকে ঘুরাইলে Q বিন্দুটি ক্রমশঃ P-র নিকটবর্তী হইবে। অবশেষে PQ এমন এক অবস্থানে উপনীত হইবে যখন P এবং Q বিন্দুর মধ্যে কোন দূরত্ব বা ব্যবধানই থাকিবে না, অর্থাৎ Q বিন্দু P-র সহিত মিলিয়া যাইবে এবং PQ ছেদকের P-বিন্দু ব্যতীত সমস্ত অংশই পরিধির বহির্ভূত হইয়া পড়িবে। এইরূপ অবস্থায় ছেদক স্পর্শকে পরিণত হয়, যেমন PQ ছেদকটি PT স্পর্শকে পরিণত হইয়াছে।



PQ ছেদকটি প্রথম অবস্থানের সহিত সমান্তরালভাবে কেন্দ্র হইতে ক্রমশঃ দূরে চলিতে থাকিলে P, Q ক্রমশঃ পরস্পরের নিকটবর্তী হইবে এবং চরম অবস্থায় P, Q মিলিত হইয়া একটিমাত্র বিন্দুতে পরিণত হইবে এবং ছেদকটি স্পর্শকে পরিণত হইবে।

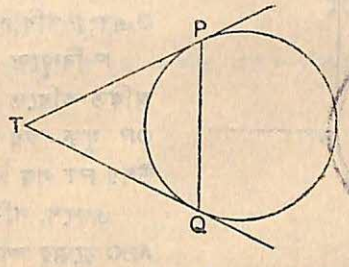


সুতরাং দেখা যাইতেছে স্পর্শক বৃত্তের ভিতরে থাকে না, পরিধিকে একটি মাত্র বিন্দুতে কেবল স্পর্শ করিয়া থাকে। সুতরাং স্পর্শবিন্দু ব্যতীত উহার বাকী সমস্ত অংশই পরিধির বহির্ভূত। সুতরাং—

জ্যা—পরিধি দ্বারা সীমাবদ্ধ, ছেদক—বর্ধিত জ্যা,

স্পর্শক—ছেদকের চরম পরিণতি।

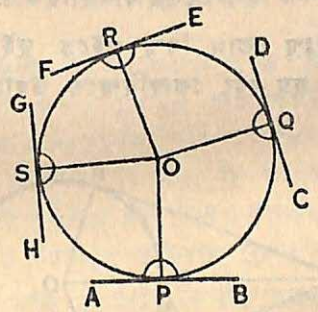
বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে একটি বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানা যায়। যে সরলরেখা ঐ স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শবিন্দু যুক্ত করে তাহাকে **স্পর্শ-জ্যা** (Chord of Contact) বলে।



INSTITUTE OF EDUCATION FOR WOMEN
Dept. of Extension SERVICE.
CALCUTTA-17

PQ স্পর্শ-জ্যা। TP এবং TQ স্পর্শকদ্বয়ের দৈর্ঘ্য।

(b) **বৃত্তের স্পর্শক ও স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সম্বন্ধ।**



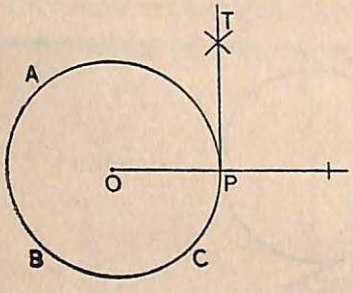
O-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া একটি বৃত্ত আঁক এবং পরিধির যে কোন P, Q, R, S বিন্দুতে যথাসম্ভব শুদ্ধভাবে APB, CQD, ERF এবং GSH চারিটি স্পর্শক আঁক।

OP, OQ, OR, OS, ব্যাসার্ধ আঁক।

এখন, চাঁদা দ্বারা মাপিয়া দেখ P, Q, R, S-বিন্দুস্থ দুই দুইটি কোণের প্রত্যেকটি 90° বা এক সমকোণ। (অবশ্য স্পর্শকগুলি শুদ্ধভাবে অঙ্কিত না হইলে উক্ত কোণসমূহের প্রত্যেকটি সমকোণ অপেক্ষা ঈষৎ কম বা বেশী হইতে পারে।)

এই পরীক্ষা হইতে মোটামুটিভাবে অনুমান করা যায় যে—**বৃত্তের স্পর্শক ও স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ পরস্পর লম্ব।**

(c) **পরিধিস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে।**

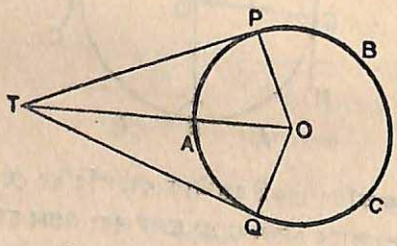


মনে কর নির্দিষ্ট ABC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং P পরিধিস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। P-বিন্দুতে ABC বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইবে। OP যুক্ত কর। P-বিন্দুতে OP-র উপর PT লম্ব টান।

এক্ষণে, পরিধিস্থ P-বিন্দুতে PT, ABC বৃত্তের স্পর্শক।

স্পর্শক বিষয়ক একটি উপপাদ্যের ব্যবহারিক প্রমাণ।

(d) **বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে দুইটি স্পর্শক টানিলে উহারা পরস্পর সমান হয় এবং কেন্দ্রবিন্দুতে উহাদের সম্মুখস্থ কোণদ্বয় সমান হয়।**



O-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ABC একটি বৃত্ত আঁক এবং পরিধিস্থ P ও Q বিন্দুতে দুইটি স্পর্শক আঁক। (এক সরলরেখায় অবস্থিত নহে এইরূপ OP এবং OQ ব্যাসার্ধের P ও Q বিন্দুতে PT এবং QT লম্ব আঁক।) মনে কর স্পর্শক দুইটি T-বিন্দুতে মিলিত হইল। এখন TP এবং TQ-কে বহিঃস্থ T বিন্দু হইতে ABC বৃত্তের স্পর্শক মনে করা যাইতে পারে। OT যোগ কর।

(1) (পরিমাপ দ্বারা) মাপিয়া দেখ TP এবং TQ-র দৈর্ঘ্য সমান, অর্থাৎ $TP = TQ$, এবং $\angle TOP = \angle TOQ$।

(2) (কাগজ ভাঁজ করিয়া)

কাগজে অনুরূপ একটি চিত্র আঁকিয়া TQ-র বরাবর কাগজখানিকে ভাঁজ কর।

দেখিবে, Q-বিন্দু P-বিন্দুর উপর পড়িবে এবং TQ সরলরেখা TP সরল-রেখার সহিত একেবারে মিলিয়া যাইবে, এবং TOQ কোণটি TOP কোণের সহিত একেবারে মিশিয়া যাইবে।

ইহা হইতে বুঝা যাইতেছে যে স্পর্শক TP = স্পর্শক TQ এবং $\angle TOP = \angle TOQ$.

একাদশ অধ্যায়

উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা

1. **জ্যামিতিক যুক্তি প্রণালীর ভিত্তি**—জ্যামিতিক তথ্য-গুলি প্রমাণ করিবার একটা সুনির্দিষ্ট ধারা আছে। কতকগুলি তথ্য অগ্রে প্রমাণ করিয়া উহার সাহায্যে পরবর্তী অধিকতর দুরূহ তথ্যগুলি যাহাতে প্রমাণ করা যাইতে পারে এইরূপে তথ্যগুলি পর পর সুবিন্যস্ত। কিন্তু তথ্যগুলি পূর্বাপর প্রমাণ সাপেক্ষ হইলেও এমন আরও কতকগুলি মৌলিক সত্য মানিয়া লইতে হয় যেগুলিকে কোনরূপ যুক্তিদ্বারা প্রমাণ করিবার প্রয়োজন হয় না। এই সত্যগুলি এত সহজ যে ইহার বিপরীত কল্পনা অসম্ভব। এইরূপ সহজ জ্ঞানের অন্তর্ভুক্ত প্রমাণ নিরপেক্ষ মৌলিক সত্যগুলিকে **স্বতঃসিদ্ধ** (Axiom) বলে।

স্বতঃসিদ্ধ দ্বিবিধ—কতকগুলি সাধারণ অর্থাৎ যেগুলি সর্বপ্রকার বস্তু সম্বন্ধে প্রযোজ্য এবং কতকগুলি জ্যামিতিক অর্থাৎ যেগুলি কেবল জ্যামিতিক বিষয়ে প্রযোজ্য।

সাধারণ স্বতঃসিদ্ধ—

1. যে যে বস্তুর প্রত্যেকটি কোন এক বস্তুর সমান তাহারা পরস্পর সমান।

2. সমান সমান বস্তুর সহিত একই বা সমান সমান বস্তু যোগ করিলে যোগফলগুলিও পরস্পর সমান হয়।

3. সমান সমান বস্তু হইতে একই বা সমান সমান বস্তু বিয়োগ করিলে বিয়োগফল বা অবশিষ্ট বস্তুগুলিও পরস্পর সমান হয়।

4. অসমান বস্তুর সহিত একই বা সমান সমান বস্তু যোগ করিলে সমষ্টিগুলিও অসমান হয়।

5. অসমান বস্তু হইতে একই বা সমান সমান বস্তু বিয়োগ করিলে অবশিষ্টগুলিও অসমান হয়।

6. সমানের দ্বারা সমান গুণিত হইলে গুণফলগুলিও পরস্পর সমান হয়।

7. সমানের দ্বারা সমান বিভক্ত হইলে ভাগফল বা অংশগুলিও পরস্পর সমান হয়।

8. একটি সমগ্র বস্তু উহার যে কোন অংশ হইতে বৃহত্তর।

জ্যামিতিক স্বতঃসিদ্ধ—

9. একটি জ্যামিতিক বস্তু অপর একটি জ্যামিতিক বস্তুর উপর স্থাপন করিলে যদি দুইটি বস্তুই অঙ্গাঙ্গিভাবে মিলিয়া যায় (অর্থাৎ সমাপতিত হয়) তবে উহারা পরস্পর সমান।

10. দুইটি সরলরেখা কোন স্থানকে সীমাবদ্ধ করিতে পারে না।

11. সকল সমকোণই পরস্পর সমান।

12. দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখার উভয়ই তৃতীয় কোন এক সরলরেখার সমান্তরাল হইতে পারে না।

দ্রষ্টব্য। প্লেফেয়ার নামক স্কটল্যাণ্ড দেশীয় পণ্ডিত দ্বাদশ স্বতঃসিদ্ধটির প্রস্তাব করিয়াছিলেন বলিয়া ইহাকে **প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ** (Playfair's Axiom) বলা হয়। ইহার বিশেষ আলোচনা পরে প্রদত্ত হইয়াছে।

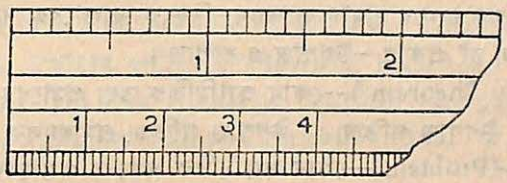
2. **স্বীকার্য** (Postulate)—পূর্বোক্ত স্বতঃসিদ্ধ ছাড়া কয়েকটি সহজ অঙ্কন প্রক্রিয়ার সম্ভাবনাও স্বীকার করিয়া লইতে হয়। এইগুলিকে স্বীকার্য বলে।

(১) যে কোন বিন্দু হইতে অপর কোন বিন্দু পর্যন্ত একটি সরলরেখা টানা যাইতে পারে।

(২) একটি সীমাবদ্ধ সরলরেখাকে যথেচ্ছভাবে উভয় দিকে বর্ধিত করা যায়।

(৩) যে কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং যে কোন সসীম সরলরেখার সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

দ্রষ্টব্য। প্রথম ও দ্বিতীয় স্বীকার্যের অঙ্কনক্রিয়া মাপনীর সাহায্যে করা হয়।



তৃতীয় স্বীকার্যের অঙ্কনক্রিয়া পেন্সিলকম্পাসের সাহায্যে করা হয়। চাপ অঙ্কনেও এই যন্ত্রটি ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

সংজ্ঞা, স্বতঃসিদ্ধ এবং স্বীকার্যগুলি জ্যামিতিক প্রমাণের মূল ভিত্তি।

3. **কাল্পনিক অঙ্কন** (Hypothetical Construction)—স্বীকার্য ব্যতীত আরও কয়েকটি কল্পিত অঙ্কন স্বীকার করিয়া লওয়া হয়। ইহাদিগকে **কাল্পনিক অঙ্কন** বলে।

স্বীকার্য অঙ্কন স্বতঃসিদ্ধের ন্যায় বিনা বিচারে ও বিনা বর্ণনায় গ্রহণ করা হয়, কিন্তু কাল্পনিক অঙ্কনগুলি উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার প্রমাণে প্রয়োজনমত কল্পনা করিয়া লওয়া হইলেও উহারা প্রমাণযোগ্য এবং উহাদের অঙ্কনকার্য স্বীকার্যের সাহায্যেই করা হয়। স্বীকার্য অঙ্কন প্রকৃতপক্ষে স্বতঃস্বীকার্য, কিন্তু কাল্পনিক অঙ্কন প্রমাণসাপেক্ষ।

(1) কোন সরলরেখার উপরিস্থিত বা বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ সরলরেখার উপর একটি লম্ব অঙ্কিত করা যায়।

(2) কোন সসীম সরলরেখাকে কোন বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করা যায়।

(3) কোন প্রদত্ত কোণকে একটি সরলরেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত করা যায়।

(4) একটি সরলরেখার যে কোন বিন্দুতে একটি প্রদত্ত কোণের সমান করিয়া আর একটি কোণ অঙ্কিত করা যায়।

(5) একটি সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু দিয়া উহার সমান্তরাল করিয়া আর একটি সরলরেখা অঙ্কিত করা যায়।

4. **প্রতিজ্ঞা** (Proposition)—সাধ্যনির্দেশকে প্রতিজ্ঞা বলে, অর্থাৎ কোন জ্যামিতিক তথ্যের প্রমাণ বা অঙ্কন বিষয়ক প্রস্তাবের নাম প্রতিজ্ঞা। সুতরাং প্রতিজ্ঞা দুই প্রকার—উপপাদ্য ও সম্পাদ্য।

উপপাদ্য (Theorem)—কোন জ্যামিতিক তথ্য প্রমাণের বা উপপত্তির প্রস্তাবের নাম উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা। উপপাদ্য প্রতিজ্ঞা প্রমাণমূলক।

সম্পাদ্য—(Problem)—কোন জ্যামিতিক অঙ্কনের প্রস্তাবের নাম সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা। সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা অঙ্কনমূলক।

প্রতিজ্ঞার চারিটি অঙ্গ—সাধারণ নির্বচন, বিশেষ নির্বচন, অঙ্কন ও প্রমাণ।

(1) **সাধারণ নির্বচন** (General Enunciation)—ইহা দ্বারা প্রতিজ্ঞার উদ্দেশ্য সাধারণ ভাবে নির্দেশ করা হয়। সাধারণ নির্বচনটির দুইটি অংশ থাকে। উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার প্রথম অংশটিকে বলে **কল্পনা** (Hypothesis) যাহা দ্বারা কিছু স্বীকার করিয়া লওয়া হয়, আর দ্বিতীয় অংশটিকে বলে **সিদ্ধান্ত বা সাধ্য** (Conclusion) যাহা দ্বারা কল্পনাকে ভিত্তি করিয়া প্রামাণ্য বিষয়ের নির্দেশ করা হয়।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞায় কল্পিত বা প্রদত্ত অংশের নাম **উপাত্ত** (Data) এবং সম্পাদ্য অংশের নাম **করণীয়** (Quaesita)।

(2) **বিশেষ নির্বচন** (Particular Enunciation)—ইহা দ্বারা চিত্রের সাহায্যে সাধারণ নির্বচনের পুনরুল্লেখ করা হয়।

(3) **অঙ্কন** (Construction)—এই অংশে প্রতিজ্ঞার সত্য প্রমাণের নিমিত্ত আবশ্যক অঙ্কনাদি বর্ণিত হয়। অবশ্য সকল প্রতিজ্ঞায় অঙ্কনের প্রয়োজন হয় না।

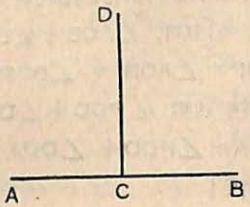
(4) **প্রমাণ** (Proof)—এই অংশে প্রতিজ্ঞার সত্য সমর্থনের জন্য যুক্তির অবতারণা করা হয়।

স্বীকৃত-সিদ্ধান্ত

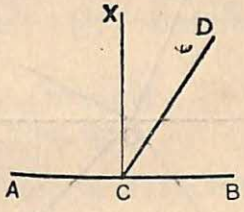
প্রমাণ সাপেক্ষ হইলেও কয়েকটি উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত স্বীকার করিয়া লওয়া হইয়াছে। ঐ সিদ্ধান্তগুলি স্বতঃসিদ্ধের ন্যায় প্রয়োজন স্থলে উপপাদ্যের প্রমাণে ব্যবহৃত হইবে। এই গ্রন্থে ঐ গুলিকে "**স্বীকৃত-সিদ্ধান্ত**" নামে অভিহিত করা হইল। প্রত্যেক স্বীকৃত-সিদ্ধান্তের কল্পনা ও সিদ্ধান্ত চিত্রের সাহায্যে পরিস্ফুট করা হইয়াছে।

স্বীকৃত সিদ্ধান্ত 1. একটি সরলরেখা অপর একটি সরলরেখার সহিত কোন বিন্দুতে মিলিত হইয়া একই পার্শ্বে যে দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন করে, তাহাদের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

[If a straight line stands on another straight line, the sum of the adjacent angles so formed is equal to two right angles]



চিত্র 1



চিত্র 2

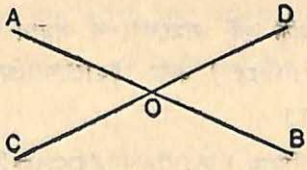
মনে কর CD সরলরেখাটি, AB সরলরেখার উপর C-বিন্দুতে মিলিত হইয়া একই পার্শ্বে DCA, DCB এই দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

তাহা হইলে, $\angle DCA + \angle DCB = 2$ সমকোণ।

স্বীকৃত-সিদ্ধান্তের প্রয়োগ

1. দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে ছেদ-বিন্দুতে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।

[If two straight lines cut one another, the four angles so formed are together equal to four right angles.]



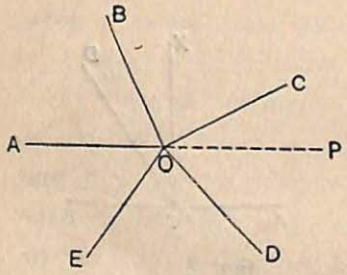
এস্থলে, $\angle AOC + \angle COB = 2$ সমকোণ,

আবার, $\angle BOD + \angle DOA = 2$ সমকোণ,

$\therefore \angle AOC + \angle COB + \angle BOD + \angle DOA = 4$ সমকোণ।

2. কতকগুলি সরলরেখা এক বিন্দুতে মিলিত হইলে সমুৎপন্ন কোণ সমূহের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান হয়।

[When any number of straight lines meet at a point, the sum of the consecutive angles so formed is equal to four right angles.]



এস্থলে, AO সরলরেখাটিকে P পর্যন্ত বর্ধিত করিলে, $\angle AOB + \angle BOC + \angle COP = \angle AOB + \angle BOP =$ দুই সমকোণ এবং $\angle POD + \angle DOE + \angle EOA = \angle POD + \angle DOA =$ দুই সমকোণ।

$\therefore \angle AOB + \angle BOC + (\angle COP + \angle POD) + \angle DOE + \angle EOA =$ চারি সমকোণ।

অর্থাৎ, $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOA =$ চারি সমকোণ।

দ্বিতীয় প্রমাণ। মনে কর একটি সরলরেখা AO সরলরেখার অবস্থান হইতে আরম্ভ করিয়া O বিন্দুর চতুর্দিকে ঘুরিয়া পুনরায় AO সরলরেখার অবস্থানে আসিয়া উপস্থিত হইল। ইহাতে ঘূর্ণ্যমান সরলরেখাটি AOE, EOD, DOC, COB এবং BOA কোণগুলি অতিক্রম করিল। কিন্তু AO সরলরেখাটি O-বিন্দুর চতুর্দিকে ঘুরিয়া পুনরায় AO অবস্থানে আসিলে AO সরলরেখা চারি সমকোণ অতিক্রম করে। সুতরাং ঐ কোণগুলির সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।

সংজ্ঞা—সম্পূরক ও পূরক কোণ।

দুইটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হইলে উহারা পরস্পর সম্পূরক (Supplementary) এবং উহাদের একটিকে অপরটির সম্পূরক (Supplement) বলে।

(স্বীকৃত-সিদ্ধান্তের চিত্রে) $\angle DCA + \angle DCB = 2$ সমকোণ।

অতএব, DCA কোণ, DCB কোণের ও DCB কোণ, DCA কোণের সম্পূরক এবং DCA, DCB কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক।

এইরূপে, 60° কোণ, 120° কোণের সম্পূরক।

দুইটি কোণের সমষ্টি এক সমকোণের সমান হইলে উহারা পরস্পর **পূরক** (Complementary) এবং উহাদের একটিকে অপরটির পূরক (Complement) বলে।

(স্বীকৃত-সিদ্ধান্তের চিত্র 2) $\angle XCD + \angle DCB = 1$ সমকোণ,

অতএব XCD কোণ, DCB কোণের ও DCB কোণ, XCD কোণের পূরক এবং XCD, DCB কোণ দুইটি পরস্পর পূরক।

এইরূপে 30° কোণ, 60° কোণের পূরক ।

সম্পূরক ও পূরক কোণ নির্ণয়—কোন কোণের পরিমাণ ডিগ্রীতে দেওয়া থাকিলে 180° ও 90° হইতে প্রদত্ত কোণের পরিমাণ বাদ দিলে যথাক্রমে উহার সম্পূরক ও পূরক কোণ নির্ণীত হইবে, যথা—

72° কোণের (1) সম্পূরক $= 180° - 72° = 108°$

(2) পূরক $= 90° - 72° = 18°$

মন্তব্য। (i) একই অথবা সমান সমান কোণের পূরক কোণগুলি পরস্পর সমান এবং সম্পূরক কোণগুলিও পরস্পর সমান।

(ii) সূক্ষ্মকোণের সম্পূরক স্থূলকোণ এবং স্থূলকোণের সম্পূরক সূক্ষ্মকোণ।

(iii) পূরক কোণ মাত্রই সূক্ষ্মকোণ।

অনুশীলনী 20

1. নিম্নলিখিত কোণগুলির পূরক কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর—
30^2, 45^{58}, $52°$, $60°$, $72°$, $42°.\ 51'$, $55°.\ 21'$, $68°.\ 33'$, $23°.\ 23'.\ 28''$, $47°.\ 50'.\ 59''$, $71°.\ 17'.\ 28''$.

2. নিম্নলিখিত কোণগুলির সম্পূরক কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর—
$30°$, $120°$, $130°$, $150°$,
$45°.\ 45'$, $60°.\ 32'$, $125°.\ 46'$, $154°.\ 24'.\ 32''$,

3. পরস্পর পূরক দুইটি কোণের একটি অপরটির চারিগুণ ; কোণ দুইটির পরিমাণ কত ডিগ্রী ?

4. প্রমাণ কর যে দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিয়া যে চারিটি কোণ উৎপন্ন করে, উহাদের একটি সমকোণ হইলে অপর তিনটিও সমকোণ হইবে।

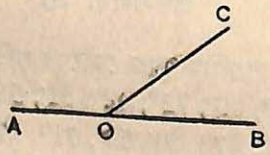
If one of the four angles formed by two intersecting staight lines be a right angle, then the other three angles are also right angles.

5. প্রমাণ কর যে সন্নিহিত কোণদ্বয়ের বহিঃস্থ বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত হইলে, উক্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূক্ত কোণ এক সমকোণের সমান। If the exterior arms of two adjacent angles are in the same straight line then the bisectors of those two angles include a right angle.

6. DC সরলরেখা AB সরলরেখার C বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে এবং একই দিকে CE সরলরেখা AB-র উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে $\angle DCE$, $\angle ACD$ ও $\angle BCD$-এর অন্তরের অর্ধ।

স্বীকৃত সিদ্ধান্ত 2. দুইটি সন্নিহিত কোণ পরস্পর সম্পূরক হইলে, উহাদের বহিঃস্থ বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

[If two adjacent angles are supplementary their exterior arms are in the same straight line.]



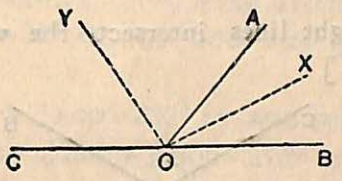
মনে কর, AOC ও COB সন্নিহিত কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক, অর্থাৎ

$$\angle AOC + \angle COB = 2 \text{ সমকোণ}।$$

তাহা হইলে OA, OB বহিঃস্থ বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত।

কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক—যে সরলরেখা কোন একটি কোণকে সমান দুই ভাগে বিভক্ত করে তাহাকে ঐ কোণের **অন্তর্দ্বিখণ্ডক** (Internal bisector) বলে; এবং কোণের একটি বাহু বর্ধিত

করায় যে সন্নিহিত সম্পূরক কোণ উৎপন্ন হয়, উহা যে সরলরেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয় তাহাকে পূর্বোক্ত কোণের **বহির্দ্বিখণ্ডক** (External bisector) বলে।



OX, ∠AOB-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং OY, বহির্দ্বিখণ্ডক।

অনুশীলনী 21

1. প্রমাণ কর যে কোন কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক পরস্পর লম্ব। Internal and external bisectors of an angle are at right angles to each other.

2. প্রমাণ কর যে দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা দ্বারা যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমদ্বিখণ্ডক দ্বারা পরস্পর লম্ব দুইটি সরলরেখা উৎপন্ন হয়। The bisectors of the four angles made by two intersecting straight lines form two straight lines perpendicular to each other.

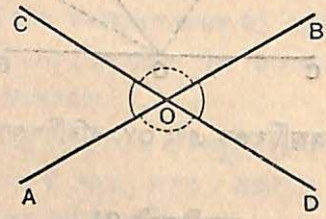
3. CO এবং DO দুইটি সরলরেখা বিপরীত পার্শ্ব হইতে AB সরলরেখার O-বিন্দুতে এইরূপে মিলিত হইয়াছে যে ∠BOC = ∠AOD ; প্রমাণ কর যে OC, OD একই সরলরেখায় অবস্থিত।

4. OA, OC, OB, OD চারিটি সরলরেখা O-বিন্দুতে এইরূপে মিলিত হইয়াছে যে ∠AOC = ∠BOD এবং ∠COB = ∠AOD ; প্রমাণ কর যে, OA, OB একই সরলরেখা এবং OC, OD একই সরলরেখা।

উপপাদ্য 1

দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে বিপ্রতীপ কোণগুলি পরস্পর সমান হয়।

[If two straight lines intersect, the vertically opposite angles are equal.]



AB ও CD দুইটি সরলরেখা O-বিন্দুতে ছেদ করিয়া AOC, BOD এবং AOD, BOC দুই দুইটি বিপ্রতীপ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(1) $\angle AOC =$ বিপ্রতীপ $\angle BOD$, (2) $\angle AOD =$ বিপ্রতীপ $\angle BOC$.

প্রমাণ। CO সরলরেখা AB সরলরেখার সহিত O-বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে,

$\therefore \quad \angle AOC + \angle COB = 2$ সমকোণ ;

আবার BO সরলরেখা CD সরলরেখার সহিত O-বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে,

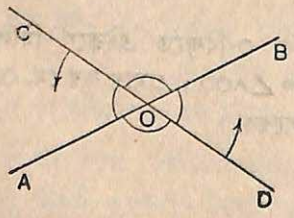
$\therefore \quad \angle COB + \angle BOD = 2$ সমকোণ

$\therefore \quad \angle AOC + \angle COB = \angle COB + \angle BOD.$

সমান সমান কোণ-সমষ্টিদ্বয় হইতে সাধারণ $\angle COB$ বাদ দিলে, $\angle AOC = \angle BOD$

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে $\angle AOD = \angle BOC$.

ঘূর্ণন প্রক্রিয়ায় প্রমাণ। মনে কর O-বিন্দু স্থির রাখিয়া CD সরলরেখাকে O-র চারিদিকে তীর প্রদর্শিত ক্রমে ঘুরান হইল। COD একটি অখণ্ড সরলরেখা বলিয়া উহার CO অংশ যে সময়ের মধ্যে AO-র সহিত মিশিয়া যাইবে, ঠিক সেই সময়ের মধ্যে DO অংশ BO-র সহিত মিশিয়া যাইবে। সুতরাং CO এবং DO-র ঘূর্ণনের পরিমাণ সমান। সুতরাং $\angle AOC =$ বিপ্রতীপ $\angle BOD$.



অনুশীলনী 22

1. AB, CD দুইটি সরলরেখা O-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে :

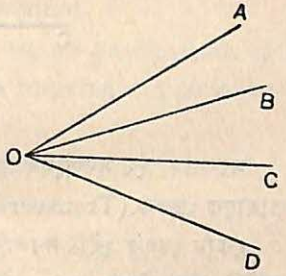
(*i*) যদি $\angle AOC = 35^0$ হয়, COB, BOD, DOA কোণগুলির পরিমাণ নির্ণয় কর।

(*ii*) যদি $\angle COB + \angle AOD = 250^0$ হয়, AOC কোণের পরিমাণ কত ?

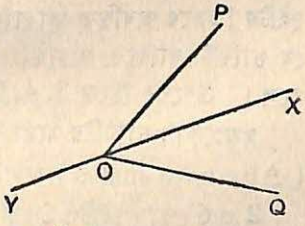
(*iii*) যদি $\angle AOC + \angle COB + \angle BOD = 274^0$ হয়, O-বিন্দুস্থ চারিটি কোণের প্রত্যেকটির পরিমাণ কত ?

2. চিত্রে $\angle AOB = \angle COD$;
প্রমাণ কর যে $\angle AOC = \angle BOD$.

চিত্রে $\angle AOC = \angle BOD$;
প্রমাণ কর যে $\angle AOB = \angle COD$.



3. চিত্রে POQ কোণের সমদ্বিখণ্ডক; XO-কে Y বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হইয়াছে
প্রমাণ কর যে $\angle POY = \angle QOY$.

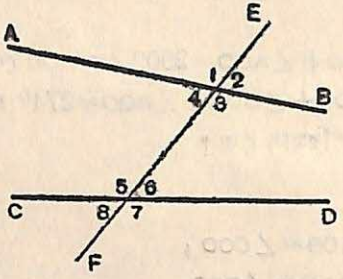


4. AB, CD দুইটি সরলরেখা O-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং AOC, BOD কোণদ্বয় যথাক্রমে OE এবং OF দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে ; প্রমাণ কর যে OE এবং OF একই সরলরেখায় অবস্থিত।

5. AB, CD সরলরেখাদ্বয় O-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে ; AOC কোণের সমদ্বিখণ্ডককে O-র দিকে বর্ধিত করিলে বর্ধিত সরলরেখা BOD কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

6. AOB, BOC দুইটি সন্নিহিত কোণ ; OP সরলরেখা BOC কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে ; প্রমাণ কর যে, $\angle AOB + \angle AOC = 2\ \angle AOP$.

সমান্তরাল সরলরেখা। সমান্তরাল সরলরেখার সংজ্ঞা পূর্বেই প্রদত্ত হইয়াছে। এস্থলে তদ্বিষয়ক সংক্ষিপ্ত আলোচনা করা হইল।



সংজ্ঞা। যে সরলরেখা দুই বা ততোধিক নির্দিষ্ট সরলরেখাকে ছেদ করে তাহাকে **ছেদক** (Transversal) বলে। উপরের চিত্রে **EF** একটি ছেদক।

কোন ছেদক দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে দুইটি ছেদবিন্দুতে সর্বসমেত আটটি কোণ উৎপন্ন হয়। এই আটটি কোণের মধ্যে যে চারিটি কোণ সরলরেখা দুইটির ভিতরে অবস্থিত তাহাদিগকে **অন্তঃকোণ** (Interior angles) এবং যে চারিটি বাহিরে অবস্থিত তাহাদিগকে **বহিঃকোণ** (Exterior angles) বলে। উপরের চিত্রে 3, 4, 5, 6 অন্তঃকোণ এবং 1, 2, 7, 8 বহিঃকোণ।

অন্তঃকোণ চারিটির মধ্যে 4 ও 6 কোণ দুইটিকে পরস্পর **একান্তর কোণ** (Alternate angles) বলে। 3 ও 5 কোণ দুইটিও পরস্পর একান্তর।

2 ও 6 কোণ দুইটির 2-কে **বহিঃকোণ** (Exterior angle) এবং 6-কে **বিপরীত অন্তঃকোণ** (Interior opposite angle) বলে। 2 ও 6-কে পরস্পর **অনুরূপ** কোণও (Corresponding angles) বলা হয়। এইরূপে 1 ও 5, 8 ও 4 এবং 7 ও 3 ইহারাও পরস্পর অনুরূপ কোণ।

স্বীকৃত-সিদ্ধান্ত 3. একটি সরলরেখা অপর দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে যদি অনুরূপ কোণ দুইটি সমান হয়, তাহা হইলে সরলরেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল।

উপরের চিত্রে 2 ও 6, 1 ও 5, 3 ও 7, অথবা 4 ও 8 এর যে কোন দুই দুইটি অনুরূপ কোণ সমান হইলে AB ও CD সমান্তরাল হইবে।

উপপাদ্য 2

একটি সরলরেখা অপর দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে, যদি

(1) যে কোন দুইটি একান্তর কোণ পরস্পর সমান হয়,

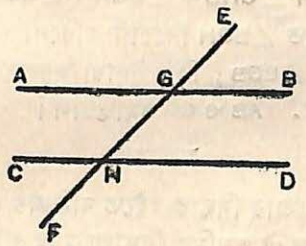
অথবা, (2) ছেদকের একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হয়,

তাহা হইলে সরলরেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

[If a straight line, cutting two other straight lines, makes (1) the alternate angles equal,

or (2) the two interior angles on the same side of the cutting line together equal to two right engles,

then, in each case, the two straight lines are parallel.]



(1) মনে কর EF সরলরেখা AB ও CD সরলরেখা দুইটিকে যথাক্রমে G এবং H বিন্দুতে এমন ভাবে ছেদ করিয়াছে যে AGH ও GHD একান্তর কোণদ্বয় পরস্পর সমান হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB ও CD সমান্তরাল।

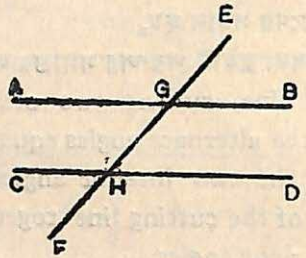
প্রমাণ। $\angle AGH = \angle EGB$ (বিপ্রতীপ কোণ বলিয়া)

আবার $\angle AGH = \angle GHD$ (কল্পনা)

$\therefore \angle EGB = \angle GHD.$

কিন্তু ইহারা অনুরূপ কোণ, $\therefore$ AB ও CD সমান্তরাল।

(2) মনে কর EF সরলরেখা AB ও CD সরলরেখা দুইটিকে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে এমনভাবে ছেদ করিয়াছে যে EF এর একই পার্শ্বস্থ BGH ও GHD অন্তঃকোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে AB ও CD সমান্তরাল।



প্রমাণ। $\angle BGH + \angle GHD =$ দুই সমকোণ। (কল্পনা)

কিন্তু BGH ও EGB সন্নিহিত কোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

$\therefore \quad \angle BGH + \angle GHD = \angle BGH + \angle EGB.$

উভয় পক্ষ হইতে $\angle BGH$ বিয়োগ করিলে,

$\angle GHD = \angle EGB$; কিন্তু ইহারা অনুরূপ কোণ।

$\therefore$ AB ও CD সমান্তরাল।

সংজ্ঞা। কোন প্রতিজ্ঞার সিদ্ধান্ত হইতে যদি অন্য কোন সিদ্ধান্ত অনায়াসে অনুমিত হয়, তাহা হইলে ঐ অনুমিত সিদ্ধান্তকে ঐ প্রতিজ্ঞার **অনুসিদ্ধান্ত** বা **অনুমান** (Corollary) বলে।

অনুসিদ্ধান্ত। যদি দুই বা ততোধিক সরলরেখার প্রত্যেকটি অপর একটি সরলরেখার উপর লম্ব হয়, তাহা হইলে উহারা পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

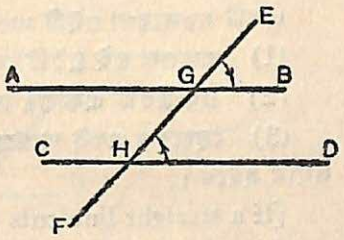
[If two or more straight lines are each perpendicular to another straight line, they are parallel to one another.]

সমান্তরাল সরলরেখা বিষয়ক তথ্য।

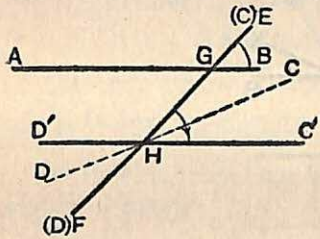
(1) মনে কর CD একটি সরলরেখা। ইহার যে কোন H-বিন্দুকে স্থির রাখিয়া ইহাকে তীর চিহ্নিত দিকে কিঞ্চিৎ ঘুরাইয়া FHGE অবস্থানে আনয়ন কর। আবার G-বিন্দুকে স্থির রাখিয়া উহাকে HGE অবস্থান হইতে বিপরীত দিকে

সমান পরিমাণ ঘুরাইয়া AGB অবস্থানে আনয়ন কর। তাহা হইলে AGB সরলরেখা CD সরলরেখার সহিত একই মুখী হইবে। এখন, যেহেতু $\angle EGB = \angle GHD$

$\therefore$ AB এবং CD সমান্তরাল; কিন্তু AB ও CD সরলরেখা দুইটি উভয়েই এক মুখী অর্থাৎ একই দিকে প্রসারিত। সুতরাং দুইটি সরলরেখা একই দিকে প্রসারিত হইলে উহারা পরস্পর সমান্তরাল।



(2) মনে কর AB একটি সরলরেখা। EF সরলরেখা AB-কে G-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখন প্রথমে কল্পনা কর অপর একটি সরলরেখা CD, EF-এর সহিত মিলিত অবস্থায় আছে। তারপর EF সরলরেখার অন্তর্গত যে কোন H-বিন্দুকে স্থির রাখিয়া CD সরলরেখাকে তীর চিহ্নিত দিকে ঘুরাইতে থাক। CD যত ঘুরিতে থাকিবে $\angle EHC$ ক্রমশঃ তত বাড়িতে থাকিবে। সুতরাং ক্রমশঃ CD এমন একটি অবস্থানে আসিবে যেখানে $\angle EHC$, $\angle EGB$ এর সমান হইবে, এবং এরূপ অবস্থান একটির বেশী হইতে পারে না, কারণ আরও ঘুরাইলে EHC কোণ ক্রমশঃ আরও বড় হইতে থাকিবে। মনে কর CD-র যে অবস্থানে $\angle EHC$, $\angle EGB$-র সমান হইয়াছে সেই অবস্থানে CD-র নাম হইল C′D′। এখন, যেহেতু $\angle EGB$ = অনুরূপ $\angle EHC'$, $\therefore$ AB এবং C′D′ সমান্তরাল;



অতএব দেখা গেল H-বিন্দু দিয়া AB-র সমান্তরাল মাত্র একটি সরলরেখা টানা যায়।

$\therefore$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল একটি মাত্র সরলরেখা টানা যায়।

এই তথ্য হইতে আমরা **প্লেফেয়ারের** নিম্নলিখিত তথাকথিত স্বতঃসিদ্ধে উপনীত হইতে পারি।

স্বতঃসিদ্ধ। দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা উভয়ই তৃতীয় একটি সরলরেখার সমান্তরাল হইতে পারে না। (দ্বাদশ স্বতঃসিদ্ধ)

উপপাদ্য 3

একটি সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করিলে,

(1) অনুরূপ দুই দুইটি কোণ পরস্পর সমান হইবে,

(2) দুই দুইটি একান্তর কোণ পরস্পর সমান হইবে,

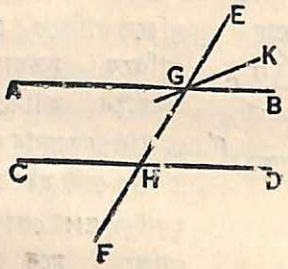
(3) ছেদকের একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হইবে।

[If a straight line cuts two parallel straight lines, it makes

(1) the corresponding angles equal,

(2) the alternate angles equal to one another,

(3) the two interior angles on the same side of the cutting line together equal to two right angles.]



মনে কর EF সরলরেখা AB ও CD সমান্তরাল সরলরেখা দুইটিকে যথাক্রমে G এবং H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

(1) প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle EGB =$ অনুরূপ $\angle GHD$.

প্রমাণ। যদি $\angle EGB$ ও $\angle GHD$ সমান না হয়, মনে কর $\angle EGK =$ অনুরূপ $\angle GHD$.

তাহা হইলে GK ও CD পরস্পর সমান্তরাল।

কিন্তু কল্পনা অনুসারে, AB ও CD পরস্পর সমান্তরাল।

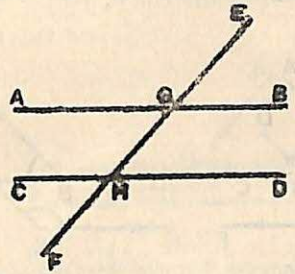
সুতরাং AB ও GK পরস্পরচ্ছেদী দুইটি সরলরেখা তৃতীয় CD সরলরেখার সহিত সমান্তরাল। কিন্তু প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ অনুসারে ইহা অসম্ভব।

সুতরাং $\angle EGK$ এবং $\angle GHD$ পরস্পর সমান হইতে পারে না।

তাহা হইলে, $\angle EGB =$ অনুরূপ $\angle GHD$.

(2) মনে কর EF সরলরেখা AB, CD সমান্তরাল সরলরেখা দুইটিকে G ও H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে, যে, ∠AGH = একান্তর ∠GHD.



INSTITUTE OF EDUCATION FOR WOMEN
Dept. of Extension SERVICE.
CALCUTTA-27

প্রমাণ। ∠AGH = বিপ্রতীপ ∠EGB.

কিন্তু AB ও CD সমান্তরাল বলিয়া, ∠EGB = অনুরূপ ∠GHD.

∴ ∠AGH = একান্তর ∠GHD.

(3) মনে কর EF সরলরেখা AB ও CD সমান্তরাল সরলরেখা দুইটিকে G ও H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে BGH এবং GHD অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

প্রমাণ। AB ও CD সমান্তরাল এবং EF উহাদিগকে G এবং H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, ∠EGB = অনুরূপ ∠GHD.

উভয় পক্ষে ∠BGH যোগ করিলে,

∠EGB + ∠BGH = ∠GHD + ∠BGH.

কিন্তু EGB ও BGH সন্নিহিত কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

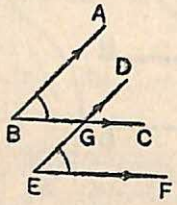
∴ BGH ও GHD কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

সংজ্ঞা। একটি প্রতিজ্ঞার কল্পনা ও সিদ্ধান্ত যদি অপর একটি প্রতিজ্ঞার যথাক্রমে সিদ্ধান্ত ও কল্পনা হয়, তবে উহাদের একটিকে অপরটির বিপরীত (converse) প্রতিজ্ঞা বলে।

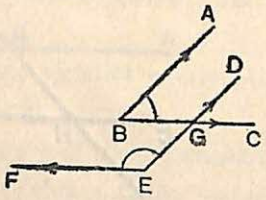
দ্রষ্টব্য। উপপাদ্য 2 ও উপপাদ্য 3 পরস্পর বিপরীত প্রতিজ্ঞা।

অনুসিদ্ধান্ত। একটি কোণের দুই বাহু যথাক্রমে অপর একটি কোণের দুই বাহুর সমান্তরাল হইলে, ঐ কোণ দুইটি পরস্পর সমান বা সম্পূরক হইবে।

[Two angles of which the arms are parallel, each to each, are either equal or supplementary.]



(প্রথম চিত্র)



(দ্বিতীয় চিত্র)

উভয় চিত্রেই AB ও DE সমান্তরাল এবং BC ও EF সমান্তরাল।
প্রথম চিত্রে, $\angle ABC$ = একান্তর $\angle BGE$ = একান্তর $\angle GEF$।
দ্বিতীয় চিত্রে, $\angle ABC$ = একান্তর $\angle BGE$ = $\angle GEF$ এর সম্পূরক।

দ্রষ্টব্য। লক্ষ্য করিবে প্রথম চিত্রে BC ও EF একই দিকে প্রসারিত, কিন্তু দ্বিতীয় চিত্রে BC ও EF বিপরীত দিকে প্রসারিত।

অন্বয়ী ও ব্যতিরেকী প্রমাণ। পূর্বোক্ত প্রতিজ্ঞায় (1) প্রমাণ পদ্ধতি লক্ষ্য করিলে দেখা যায় যে প্রত্যক্ষ যুক্তি দ্বারা সাধ্য বিষয় প্রমাণ না করিয়া সিদ্ধান্তকে সত্য বলিয়া অস্বীকার করা হইয়াছে এবং অনুরূপ সিদ্ধান্তকে সত্য বলিয়া কল্পনা করা হইয়াছে। ফলে, এমন একটি সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া গিয়াছে যাহা একেবারেই অসম্ভব বা কল্পনাবিরুদ্ধ। সুতরাং অসম্ভব সিদ্ধান্ত ত্যাগ করিয়া পূর্ব সিদ্ধান্তই সত্য বলিয়া স্বীকার করিয়া লওয়া হইয়াছে। এইরূপ প্রমাণ পদ্ধতিকে **ব্যতিরেকী প্রমাণ** (Indirect proof or reductio ad absurdum) বলে।

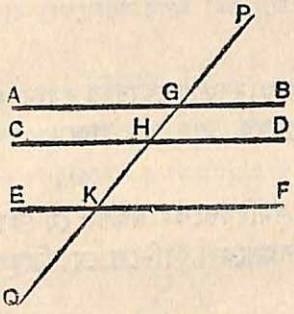
অন্বয়ী প্রমাণে (Direct proof) কল্পনাকে ভিত্তি করিয়া প্রত্যক্ষ যুক্তি দ্বারা সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায়।

অনেক স্থলে কোন প্রতিজ্ঞার বিপরীত প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করিবার জন্য ব্যতিরেকী প্রমাণপদ্ধতি অবলম্বন করা হয়।

উপপাদ্য 4

যে সকল সরলরেখা একই সরলরেখার সমান্তরাল, তাহারা পরস্পর সমান্তরাল।

[Straight lines which are parallel to the same straight line are parallel to one another.]



মনে কর, AB ও CD সরলরেখা দুইটির প্রত্যেকেই EF সরলরেখার সমান্তরাল।

প্রমাণ করিতে হইবে AB ও CD পরস্পর সমান্তরাল।

অঙ্কন। মনে কর PQ ছেদক AB, CD ও EF-কে যথাক্রমে G, H, K বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ। AB ও EF সমান্তরাল এবং PGKQ উহাদের ছেদক,

$\therefore$ $\angle AGK =$ একান্তর $\angle GKF$.

আবার, CD ও EF সমান্তরাল এবং PHKQ উহাদের ছেদক,

$\therefore$ বহিঃ $\angle GHD =$ বিপরীত অন্তঃ $\angle GKF$.

$\therefore$ $\angle AGK$ অর্থাৎ $\angle AGH = \angle GHD$; কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ

$\therefore$ AB ও CD সমান্তরাল।

দ্বিতীয় প্রমাণ। যদি AB ও CD সমান্তরাল না হয়, তবে বর্ধিত হইলে উহারা নিশ্চয়ই মিলিত হইবে। সুতরাং দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা AB, CD উভয়ই EF-এর সমান্তরাল হইবে। কিন্তু প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ অনুসারে ইহা অসম্ভব। সুতরাং বর্ধিত হইলে AB, CD মিলিত হইতে পারে না।

সুতরাং AB ও CD সমান্তরাল।

অনুশীলনী 23

1. 4 উপপাদ্যের চিত্রে $\angle EKQ = 60^\circ$ হইলে, ঐ চিত্রের অবশিষ্ট এগারটি কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

2. কোন সরলরেখা যদি দুই বা ততোধিক সমান্তরাল সরলরেখার কোন একটির উপর লম্ব হয়, তবে উহা অপর সরলরেখা বা অপর সরলরেখাগুলির উপরও লম্ব হইবে।

3. কোন ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয় সমান হইলে, ভূমির সমান্তরাল যে কোন সরলরেখা ত্রিভুজের অপর দুই বাহুকে ছেদ করিয়া সমান কোণ উৎপন্ন করে।

4. কোন কোণের সমদ্বিখণ্ডকের অন্তর্গত যে কোন বিন্দু হইতে যে কোন একটি বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা টানিলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে উহার দুইটি কোণ সমান।

5. একটি সরলরেখা অপর দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে যদি একটি বহিঃকোণ ছেদকের পার্শ্বস্থ বিপরীত অন্তঃকোণের সমান হয়, প্রমাণ কর যে কোণ দুইটির সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় সমান্তরাল।

6. কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণের বহির্দ্বিখণ্ডক ভূমির সমান্তরাল হইলে, ত্রিভুজটির ভূমিসংলগ্ন কোণ দুইটি সমান হইবে। If the external bisector of the vertical angle of a triangle is parallel to the base, the base angles of the triangle are equal.

7. কোন ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণ দুইটি পরস্পর সমান হইলে, উহার শীর্ষ দিয়া অঙ্কিত ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা শিরঃকোণের বহির্দ্বিখণ্ডক হইবে। If a straight line drawn through the vertex of a triangle of which the base-angles are equal, be parallel to the base, it bisects the vertical angle externally.

8. যদি একটি সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে দুইটি একান্তর কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ও পরস্পর সমান্তরাল।

9. যদি একটি ত্রিভুজের তিন বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর সমান্তরাল হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ কোণগুলি পরস্পর সমান

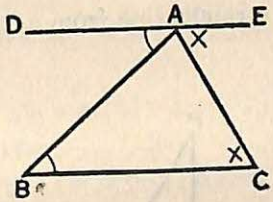
হইবে। If the three sides of one triangle be parallel to the three sides of another, each to each, then their corresponding angles are equal.

10. যদি দুইটি সরলরেখার একটি অপর কোন তৃতীয় সরলরেখার উপর লম্ব হয় এবং অপরটি লম্ব না হয়, প্রমাণ কর যে সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল নহে।

উপপাদ্য 5

ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

[The sum of the angles of a triangle is equal to two right angles.]



মনে কর ABC একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC =$ দুই সমকোণ।

অঙ্কন। A বিন্দু দিয়া BC-র সমান্তরাল করিয়া DAE সরলরেখা টান।

প্রমাণ। DE এবং BC সমান্তরাল, AB উহাদের ছেদক,

$\therefore \quad \angle DAB =$ একান্তর $\angle ABC$.

আবার DE এবং BC সমান্তরাল, AC উহাদের ছেদক,

$\therefore \quad \angle EAC =$ একান্তর $\angle ACB$.

$\therefore \quad \angle ABC + \angle ACB = \angle DAB + \angle EAC$.

এখন, উভয় পক্ষে $\angle BAC$ যোগ করিলে,

$\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = \angle DAB + \angle EAC + \angle BAC$

= সরলকোণ DAE

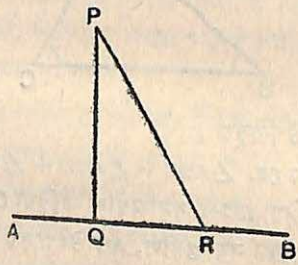
= দুই সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত 1. ত্রিভুজের যে কোন দুইটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। [Any two angles of a triangle are together less than two right angles.]

অনুসিদ্ধান্ত 2. প্রত্যেক ত্রিভুজে অন্ততঃ দুইটি সূক্ষ্মকোণ থাকিবেই। [Every triangle must have at least two acute angles]

ত্রিভুজের একটি কোণ স্থূলকোণ অথবা সমকোণ হইলে প্রথম অনুসিদ্ধান্ত অনুসারে অপর দুইটি কোণের প্রত্যেকটিই এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে। সুতরাং ত্রিভুজটি সমকোণীই হউক আর স্থূলকোণীই হউক উহাতে অন্ততঃ দুইটি সূক্ষ্মকোণ থাকিবে।

অনুসিদ্ধান্ত 3. বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর একটি মাত্র লম্ব অঙ্কিত করা যায়। [Only one perpendicular can be drawn to a straight line from a given point outside it.]



যদি সম্ভব হয়, তাহা হইলে P হইতে AB-র উপর PQ এবং PR দুইটি লম্ব টান।

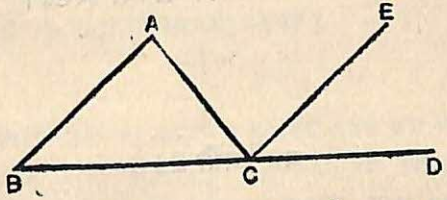
তাহা হইলে PQR এমন একটি ত্রিভুজ যাহার $\angle PQR + \angle PRQ =$ দুই সমকোণ। কিন্তু প্রথম অনুসিদ্ধান্ত অনুসারে ইহা অসম্ভব।

সুতরাং P হইতে AB-র উপর একটির বেশী লম্ব টানা যায় না।

উপপাদ্য 6

ত্রিভুজের কোন বাহু বর্ধিত হইলে বহিঃকোণ বিপরীত অন্তঃকোণ দুইটির সমষ্টির সমান।

[If one side of a triangle is produced, the exterior angle so formed is equal to the sum of the two interior opposite angles.]



মনে কর ABC ত্রিভুজের BC বাহু D পর্যন্ত বর্ধিত করায় ACD বহিঃকোণ উৎপন্ন হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, বহিঃকোণ $\angle ACD$, বিপরীত অন্তঃকোণ BAC এবং ABC-এর সমষ্টির সমান।

অঙ্কন। C-বিন্দু দিয়া BA সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া CE সরলরেখা টান।

প্রমাণ। AB ও CE সমান্তরাল এবং AC উহাদের ছেদক,

$\therefore \angle BAC =$ একান্তর $\angle ACE$

আবার, AB ও CE সমান্তরাল এবং BD উহাদের ছেদক,

$\therefore \angle ABC =$ অনুরূপ $\angle ECD$.

$\therefore \angle BAC + \angle ABC = \angle ACE + \angle ECD$

$= \angle ACD$.

বিকল্প প্রমাণ। $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 2$ সমকোণ।

আবার $\angle ACD + \angle ACB = 2$ সমকোণ (সন্নিহিত কোণ বলিয়া)

$\therefore \angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = \angle ACD + \angle ACB$.

উভয় পক্ষ হইতে $\angle ACB$ বাদ দিলে,

$\angle ABC + \angle BAC = \angle ACD$.

অনুসিদ্ধান্ত। ত্রিভুজের কোন বাহু বর্ধিত হইলে উৎপন্ন বহিঃকোণ বিপরীত অন্তঃকোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

[If one side of a triangle is produced, the exterior angle so formed is greater than either of the interior opposite angles.]

যেহেতু বহিঃকোণ বিপরীত অন্তঃকোণ দুইটির সমষ্টির সমান, অতএব বহিঃকোণটি যে কোন বিপরীত অন্তঃকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

অনুশীলনী 24

1. ত্রিভুজের যে কোন বাহু উভয় দিকে বর্ধিত করিলে বহিঃকোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

2. কোন ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহু উভয় দিকে বর্ধিত করা হইলে, উৎপন্ন ছয়টি বহিঃকোণের সমষ্টি আট সমকোণের সমান হয়।

If each side of a triangle is produced both ways, show that the sum of all the six exterior angles is equal to eight right angles. (S. F. W. B. 1953)

3. ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয় সমান হইলে উহাদের প্রত্যেকটিই সূক্ষ্মকোণ এবং উহার ভূমি ব্যতীত অপর বাহুদ্বয় ভূমির দিকে বর্ধিত করিলে প্রত্যেক বহিঃকোণ স্থূলকোণ হইবে।

4. কোন ত্রিভুজের কোণ তিনটি পরস্পর সমান হইলে, উহাদের প্রত্যেকটিই সূক্ষ্মকোণ।

5. কোন ত্রিভুজের অন্তর্বর্তী যে কোন বিন্দুর সহিত ভূমিপ্রান্তদ্বয় যোগ করিলে ঐ বিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন হয় তাহা ত্রিভুজের শিরঃকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর। The angle subtended by the base of a triangle at any point within it is greater the vertical angle.

6. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু ভূমির যে কোন বিন্দুর সহিত সংযুক্ত করিয়া প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের যে কোন দুইটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

7. ABC ত্রিভুজের A-কোণের সমদ্বিখণ্ডক BC ভূমির D-বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর $\angle ADB > \angle BAD$.

8. চতুর্ভুজের যে কোন তিনটি কোণের সমষ্টি চারি সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। The sum of any three angles of a quadrilateral is less than four right angles.

9. ABC ত্রিভুজের CB বাহু F পর্যন্ত, AC, E পর্যন্ত এবং BA, D পর্যন্ত বর্ধিত করা হইয়াছে, প্রমাণ কর যে, FBA, ECB, DAC কোণ তিনটির যে কোন দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

উপপাদ্য হইতে নিম্নলিখিত সত্যসমূহ সহজেই গ্রহণ করা যায়—

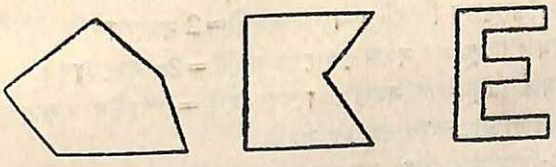
(1) ABC কোন ত্রিভুজ হইলে, $\angle A + \angle B + \angle C =$ দুই সমকোণ $= 180^\circ$.

(2) একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুই কোণের সমান হইলে, উভয় ত্রিভুজের তৃতীয় কোণদ্বয় পরস্পর সমান।

(3) সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ দুইটি পরস্পর পূরক।

(4) কোন ত্রিভুজের একটি কোণ অপর দুইটি কোণের সমষ্টির সমান হইলে, ত্রিভুজটি সমকোণী হইবে।

সংজ্ঞা। যে বহুভুজ ক্ষেত্রের প্রবৃদ্ধ কোণ নাই তাহাকে **কন্‌ভেক্স** বহুভুজ (Convex polygon) বলে।



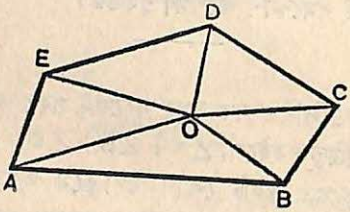
চিত্র 1 চিত্র 2 চিত্র 3

প্রথম চিত্র কন্‌ভেক্স বহুভুজ, দ্বিতীয় ও তৃতীয় কন্‌ভেক্স নহে।

উপপাদ্য 7

কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের অন্তঃকোণ সমূহের সমষ্টি, ঐ ক্ষেত্রের যে কয়টি বাহু তাহার দ্বিগুণ সংখ্যক সমকোণ অপেক্ষা চারি সমকোণ কম।

[The sum of the interior angles of any rectilineal figure is equal to twice as many right angles as the figure has sides diminished by four right angles.]



মনে কর, ABCDE একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্র এবং ইহার বাহুসংখ্যা n.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ক্ষেত্রটির অন্তঃকোণ সমূহের সমষ্টি $=(2n-4)$ সমকোণ।

অঙ্কন। ক্ষেত্রটির অন্তঃস্থ যে কোনও O-বিন্দুর সহিত প্রত্যেক কৌণিক বিন্দু সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। এখন, ক্ষেত্রটি n-সংখ্যক ত্রিভুজে বিভক্ত হইল।

প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি $=2$ সমকোণ।

$\therefore$ সমস্ত ত্রিভুজের সমস্ত কোণের সমষ্টি $=2n$ সমকোণ।

কিন্তু সমস্ত ত্রিভুজের সমস্ত কোণের সমষ্টি = ক্ষেত্রটির অন্তঃকোণ সমূহের সমষ্টি + O-বিন্দুস্থিত কোণ সমূহের সমষ্টি।

কিন্তু O-বিন্দুস্থিত কোণ সমূহের সমষ্টি $=4$ সমকোণ।

$\therefore$ ক্ষেত্রটির অন্তঃকোণ সমূহের সমষ্টি $+4$ সমকোণ $=2n$ সমকোণ।

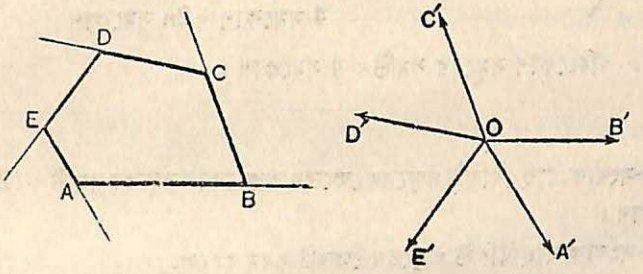
$\therefore$ ক্ষেত্রটির অন্তঃকোণ সমূহের সমষ্টি $=2n$ সমকোণ -4 সমকোণ

$=(2n-4)$ সমকোণ।

উপপাদ্য 8

কোন প্রবদ্ধকোণশূন্য ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বাহুগুলি একই ক্রমে বর্ধিত হইলে, উৎপন্ন বহিঃকোণগুলির সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।

[If the sides of a convex rectilineal figure be produced in order, then all the exterior angles so formed are together equal to four right angles.]



মনে কর, ABCDE একটি n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্র। ইহার বাহুগুলি একই ক্রমে বর্ধিত করা হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে A,B,C,D,E বহিঃকোণগুলির সমষ্টি = 4 সমকোণ।

অঙ্কন। O একটি বিন্দু লও এবং EA-র সমান্তরাল করিয়া OA′, AB-র সমান্তরাল করিয়া OB′, BC-র সমান্তরাল করিয়া OC′, CD-র সমান্তরাল করিয়া OD′ এবং DE-র সমান্তরাল করিয়া OE′ টান।

প্রমাণ। EA ∥ OA′ এবং AB ∥ OB′ ; ∴ বহিঃ $\angle A = \angle A'OB'$,

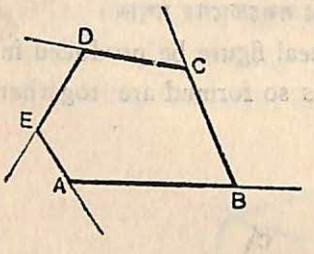
এইরূপে বহিঃ $\angle B = \angle B'OC'$, বহিঃ $\angle C = \angle C'OD'$,

বহিঃ $\angle D = \angle D'OE'$, বহিঃ $\angle E = \angle E'OA'$,

∴ A,B,C,D,E, বহিঃকোণগুলির সমষ্টি = O বিন্দুস্থিত কোণসমূহের সমষ্টি
= 4 সমকোণ।

দ্বিতীয় প্রমাণ

যেহেতু ক্ষেত্রটির বাহুর সংখ্যা n, সুতরাং ইহার n-সংখ্যক শীর্ষ আছে।



প্রত্যেক শীর্ষে অন্তঃকোণ ও বহিঃকোণের সমষ্টি = 2 সমকোণ।

ক্ষেত্রটিতে n-সংখ্যক শীর্ষ আছে ;

∴ ক্ষেত্রটির অন্তঃকোণ সমূহের সমষ্টি + বহিঃকোণ সমূহের সমষ্টি = $2n$ সমকোণ।

কিন্তু অন্তঃকোণ সমূহের সমষ্টি + 4 সমকোণ = $2n$ সমকোণ।

∴ বহিঃকোণ সমূহের সমষ্টি = 4 সমকোণ।

---

n-সংখ্যক বাহু বিশিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রের অন্তঃকোণ সমূহের সমষ্টি = $(2n-4)$ সমকোণ।

n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রটি সুষম হইলে,

উহার প্রত্যেক অন্তঃকোণ = $\frac{2n-4}{n}$ সমকোণ $= \frac{2n-4}{n} \times 90°$

এবং প্রত্যেক বহিঃকোণ = $\frac{4}{n}$ সমকোণ $= \frac{360°}{n}$.

অনুশীলনী 25

1. চতুর্ভুজের চারিটি কোণের সমষ্টি চারি সমকোণ।

2. কোন ত্রিভুজের তিনটি কোণ পরস্পর সমান হইলে, উহার প্রত্যেক কোণের পরিমাণ 60°।

3. কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণের পরিমাণ 50° ও 60° ; তৃতীয় কোণের পরিমাণ কত ?

4. কোন ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয় সমান এবং প্রত্যেক কোণ শিরঃকোণের দ্বিগুণ। ত্রিভুজটির কোণ তিনটির পরিমাণ ডিগ্রীতে নির্ণয় কর।

5. কোন ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণ দুইটির সমষ্টি ও অন্তর যথাক্রমে 108° ও 12° ; ত্রিভুজটির কোণ তিনটির পরিমাণ নির্ণয় কর।

6. দুইটি সরলরেখা যথাক্রমে অপর দুইটি সরলরেখার উপর লম্ব হইলে, প্রথম দুইটি সরলরেখার অন্তর্গত সূক্ষ্মকোণ অপর দুইটি সরলরেখার অন্তর্গত সূক্ষ্মকোণের সমান হইবে।

If two straight lines are perpendicular to two other straight lines, each to each, the acute angle between the first pair is equal to the acute angle between the second pair.

7. একটি সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করিলে, ছেদকের একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ দুইটির সমদ্বিখণ্ডক পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে।

8. ABC ত্রিভুজের $\angle B$ ও $\angle C$-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক O-বিন্দুতে মিলিত হইলে, প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}A$.

9. ABC ত্রিভুজের $\angle B$ ও $\angle C$-এর বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় O-বিন্দুতে মিলিত হইলে, প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90° - \frac{1}{2}A$.

10. ABCD চতুর্ভুজের $\angle B$ ও $\angle C$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O-বিন্দুতে মিলিত হইলে, প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$. (C, U. 1936, 1942)

11. সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের যে কোন দুই কোণের সমষ্টি তৃতীয় কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

12. ত্রিভুজের একটি কোণ অপর দুই কোণের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, ত্রিভুজটি স্থূলকোণী।

13. একটি ত্রিভুজের ভূমিকে উভয় দিকে বর্ধিত করায় যে দুইটি বহিঃকোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের সমষ্টি 225° ; শিরঃকোণের পরিমাণ কত ডিগ্রী ?

14. পঞ্চভুজ, ষড়্‌ভুজ, অষ্টভুজ, দশভুজ, ও দ্বাদশভুজের প্রত্যেকের অন্তঃকোণ সমূহের সমষ্টি নির্ণয় কর।

15. পাঁচ বাহু, ছয় বাহু, দশ বাহু, বার বাহু ও পনর বাহু বিশিষ্ট সুষম বহুভুজ সমূহের প্রত্যেকের প্রত্যেক অন্তঃকোণ ও বহিঃকোণের পরিমাণ পৃথক ভাবে ডিগ্রীতে নির্ণয় কর।

16. কোন পঞ্চভুজের চারিটি কোণের পরিমাণ 65°, 75°, 120°, ও 135° হইলে, পঞ্চম কোণটির পরিমাণ কত ?

17. কোন সুষম বহুভুজের প্রত্যেক অন্তঃকোণ (1) 108°, (2) 150° বা (3) 156° হইলে, উহার বাহুর সংখ্যা কত ?

18. কোন সুষম ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বাহুগুলিকে একই ক্রমে বর্ধিত করিলে প্রত্যেক বহিঃকোণ যদি (1) 40°, (2) 60°, (3) 72° বা (4) 120° হয়, তবে উহার বাহুসংখ্যা নির্ণয় কর।

19. কোন সুষম বহুভুজের প্রত্যেক অন্তঃকোণ দুই সমকোণের $\frac{9}{10}$-এর সমান হইলে, উহার বাহুসংখ্যা কত ?

20. কোন সুষম বহুভুজের প্রত্যেক অন্তঃকোণ প্রত্যেক বহিঃকোণের আটগুণ ; বহুভুজের বাহুর সংখ্যা কত ?

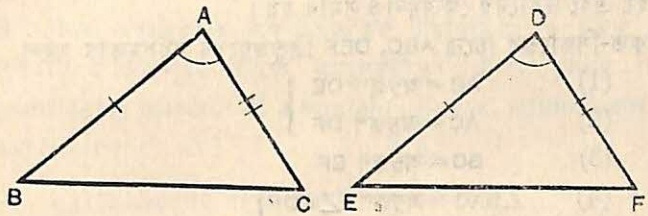
21. কোন সুষম বহুভুজের প্রত্যেক অন্তঃকোণ 156° হইতে পারে কিনা ? যদি হইতে পারে তবে উক্ত বহুভুজের বাহুসংখ্যা কত ?

22. কোন সুষম বহুভুজের যে কোন বাহু বর্ধিত করা হইলে, বহিঃকোণের পরিমাণ 55° হইতে পারে না কেন ?

23. কোন ত্রিভুজের একটি কোণ অপর দুই কোণের সমষ্টির সমান। শেষোক্ত কোণ দুইটির একটির পরিমাণ 50° হইলে, অপরটির পরিমাণ কত ডিগ্রী ?

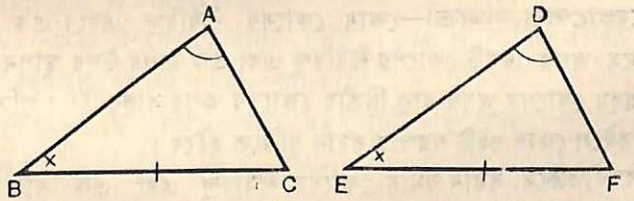
24. কোন যুগ্মসংখ্যক বাহু বিশিষ্ট বহুভুজের অন্তঃকোণগুলি একান্তরভাবে 138° ও 150° ; উহার বাহুর সংখ্যা নির্ণয় কর। Find the number of sides of a polygon of even number of sides if its interior angles measure alternately 138° and 150°.

স্বীকৃত-সিদ্ধান্ত 4. যদি কোন ত্রিভুজের দুই বাহু ও উহাদের অন্তর্ভূত কোণ যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুই বাহু ও উহাদের অন্তর্ভূত কোণের সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।



মনে কর ABC ও DEF ত্রিভুজের মধ্যে AB = DE, AC = DF,
এবং অন্তর্ভূত ∠BAC = অন্তর্ভূত ∠EDF ;
তাহা হইলে ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

স্বীকৃত-সিদ্ধান্ত 5. যদি দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একটির দুই কোণ যথাক্রমে অপরটির দুই কোণের সমান হয় এবং একটি ত্রিভুজের এক বাহু অপরটির অনুরূপ বাহুর সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।



মনে কর ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে ∠BAC = ∠EDF,
∠ABC = ∠DEF, BC বাহু = EF বাহু।
তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

দুইটি ত্রিভুজের সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুদ্বয়কে পরস্পর **অনুরূপ** বাহু বলা হয়।

দ্রষ্টব্য। একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণের সমান হইলে উভয় ত্রিভুজের তৃতীয় কোণ দুইটি পরস্পর সমান হইবে।

সুতরাং একটি ত্রিভুজের দুই কোণ অপর এক ত্রিভুজের দুই কোণের সমান হইলে এবং ইহাদের যে কোন অনুরূপ বাহুদ্বয় সমান হইলেও ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।

দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হইলে উহাদের অনুরূপ বাহু ও কোণগুলি পরস্পর সমান হয় এবং উহাদের ক্ষেত্রফলও সমান হয়।

স্বীকৃত-সিদ্ধান্তের চিত্রে ABC, DEF ত্রিভুজদ্বয়ের সর্বসমতার ফলে,

(1) AB = অনুরূপ DE
(2) AC = অনুরূপ DF
(3) BC = অনুরূপ EF
(4) $\angle BAC$ = অনুরূপ $\angle EDF$
(5) $\angle ABC$ = অনুরূপ $\angle DEF$
(6) $\angle ACB$ = অনুরূপ $\angle DFE$
(7) $\triangle ABC$-এর ক্ষেত্রফল = $\triangle DEF$-এর ক্ষেত্রফল।

মন্তব্য। দুইটি ত্রিভুজের বাহু ও কোণগুলি পরস্পর সমান না হইলেও ক্ষেত্রফল সমান হইতে পারে, কিন্তু তদবস্থায় তাহাদিগকে সর্বসম বলা চলে না।

সরলরেখার সমতা—একটি সীমাবদ্ধ সরলরেখাকে অন্য একটি সীমাবদ্ধ সরলরেখার উপর স্থাপন করিলে যদি উভয়ের প্রান্তবিন্দু মিলিত হয়, তবে সরলরেখা দুইটি পরস্পর সমান।

কোণের সমতা—কোন কোণের শীর্ষবিন্দু এবং এক বাহুকে যথাক্রমে অপর একটি কোণের শীর্ষবিন্দু এবং এক বাহুর উপর স্থাপন করিলে যদি প্রথম কোণের অপর বাহু দ্বিতীয় কোণের অপর বাহুর উপর পতিত হয়, তাহা হইলে কোণ দুইটি পরস্পর সমান বুঝিতে হইবে।

বিপরীতক্রমে, সমান সমান কোণের শীর্ষবিন্দু এবং এক বাহু মিলিত হইলে অপর বাহুদ্বয়ও মিলিত হইতে পারে।

অনুশীলনী 26

1. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক উহার ভূমিকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

The bisector of the vertical angle of an isosceles triangle is perpendicular upon the base at its middle point.

2. কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণ হইতে অঙ্কিত লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু। If the perpendicular drawn from the vertex of a triangle upon the base bisects the base, then the triangle is isosceles.

3. কোন সরলরেখার লম্ব-দ্বিখণ্ডকের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু ঐ সরলরেখার প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী। Any point on the perpendicular bisector of a straight line is equidistant from its extremities.

4. সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি পরস্পর সমান।

The three medians of an equilateral triangle are equal.

5. বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান। Diagonals of a square are equal. (বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং কোণগুলি সমকোণ ধরিয়া লও।)

6. আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান। Diagonals of a rectangle are equal. (আয়তক্ষেত্রের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং কোণগুলিও সমকোণ ধরিয়া লও।)

7. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে AB = AC, P ও Q, AB ও AC-র মধ্যবিন্দু ; প্রমাণ কর যে BQ = PC.

8. ABCD বর্গক্ষেত্রের বাহুর উপর L, M, N, P বিন্দু চারিটি এইরূপে লওয়া হইয়াছে যে AL = BM = CN = DP ;

প্রমাণ কর যে LMNP চতুর্ভুজের চারিটি বাহুই পরস্পর সমান।

9. PQ এবং XY লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে ;

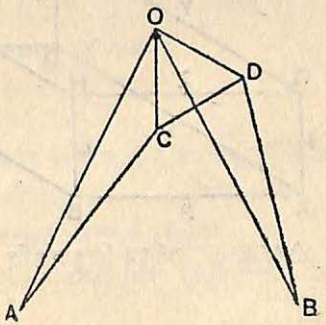
প্রমাণ কর, PX = XQ = QY = YP.

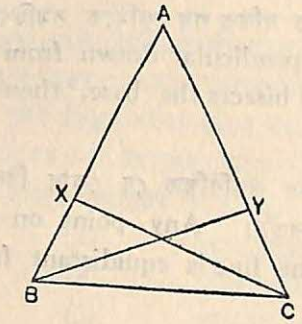
10. চিত্রে, OA = OB,

OC = OD,

$\angle AOB = \angle COD$;

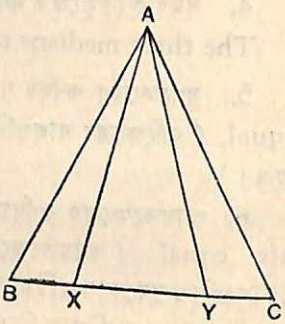
প্রমাণ কর যে AC = BD



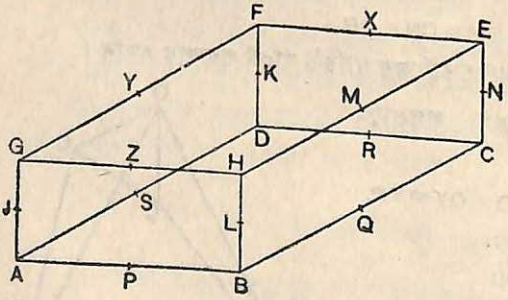


11. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে $AB = AC$, $AX = AY$;
প্রমাণ কর যে,
(1) $CX = EY$
(2) $\angle AXC = \angle AYB$
(3) $\angle BXC = \angle CYB$
(4) $\angle XCB = \angle YBC$.

12. ABC ত্রিভুজে
$AB = AC$,
$BX = CY$,
$\angle B = \angle C$;
প্রমাণ কর $\triangle AXY$ সমদ্বিবাহু।



13. নীচের চিত্রটি ইষ্টকের ন্যায় একটি ঘনপদার্থ (Rectangular block). ইহার



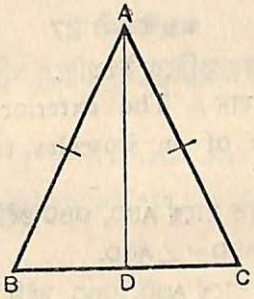
$AG = EH = CE = DF$.
$AD = BC = GF = HE$.
$AB = DC = CH = FE$,
AG, AD, AB অসমান ;
প্রত্যেক ধারের মধ্যবিন্দু চিহ্নিত আছে।

$\triangle ASP$, $\triangle ADR$, $\triangle ADC$, $\triangle ACH$ এবং $\triangle AGE$-এর সর্বসম ত্রিভুজগুলি নির্ণয় কর।

উপপাদ্য 9

কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান হইলে, উহাদের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

[If two sides of a triangle are equal, the angles opposite to these sides are equal.]



ABC ত্রিভুজে, AB = AC

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle ABC = \angle ACB$.

অঙ্কন। মনে কর AD সরলরেখা $\angle BAC$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া BC বাহুর সহিত D-বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে।

প্রমাণ। ABD ও ACD দুইটি ত্রিভুজে,

AB = AC, AD উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু

এবং অন্তর্ভূত $\angle BAD$ = অন্তর্ভূত $\angle CAD$ (অঙ্কন)।

$\therefore$ $\triangle ABD$ ও $\triangle ACD$ সর্বসম ;

$\therefore$ $\angle ABD = \angle ACD$ অর্থাৎ, $\angle ABC = \angle ACB$।

দ্রষ্টব্য। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয় ব্যতীত তৃতীয় বাহুকে ভূমি ধরা হয়। উক্ত উপপাদ্যের সাধারণ নির্বচন এই ভাবেও প্রকাশ করা যায় :

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয় পরস্পর সমান।

[The angles at the base of an isosceles triangle are equal.]

অনুসিদ্ধান্ত 1. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহু দুইটি বর্ধিত করিলে ভূমির সহিত যে দুইটি বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তাহারা পরস্পর সমান।

[If the equal sides of an isosceles triangle are produced, the exterior angles thus formed are equal.]

অনুসিদ্ধান্ত 2. সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি কোণই পরস্পর সমান।

[If a triangle is equilateral, all its angles are equal.]

অনুশীলনী 27

1. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিকে উভয়দিকে বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ দুইটি পরস্পর সমান। The exterior angles formed by producing the base of an isosceles triangle on both sides are equal.

2. BC ভূমির বিপরীত পার্শ্বে ABC, DBC দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া প্রমাণ কর যে $\angle ABD = \angle ACD$.

3. BC ভূমির একই পার্শ্বে ABC, DBC দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া প্রমাণ কর যে $\angle ABD = \angle ACD$.

4. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির উপর ভূমিপ্রান্ত হইতে সমদূরবর্তী যে কোন দুইটি বিন্দু শীর্ষবিন্দু হইতে সমদূরবর্তী। Any two points on the base of an isosceles triangle equidistant from the extremities of the base are equidistant from the vertex.

5. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুসমূহ যোগ করিলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তাহা সমদ্বিবাহু। The triangle formed by joining the middle points of the sides of an isosceles triangle is also isosceles.

6. কোন চতুর্ভুজের চারিটি বাহু সমান হইলে, উহার বিপরীত দুই দুইটি কোণও পরস্পর সমান। If the sides of a quadrilateral are equal, then its opposite angles are equal.

7. কোন ত্রিভুজের ভূমির উপর অঙ্কিত মধ্যমা ভূমির অর্ধেক হইলে, শিরঃকোণ ভৌমিক কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইবে। If the median drawn on the base of a triangle is half the base, then the vertical angle is equal to the sum of the base angles.

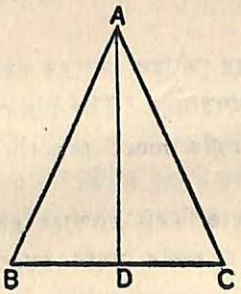
8. ABCDEF একটি সুষম ষড়্-ভুজ ; প্রমাণ কর যে, ACE একটি সমবাহু ত্রিভুজ। ABCDEF is a regular hexagon ; prove that the triangle ACE is equilateral. (C. U. 1918, 1921)

9. বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর দুইটির অধিক পরস্পর সমান সরলরেখা অঙ্কিত করা যায় না। (C. U. 1932)

উপপাদ্য 10

কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর সমান হইলে, উহাদের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান।

[If two angles of a triangle are equal, then the sides opposite to these equal angles are also equal.]



ABC ত্রিভুজে $\angle ABC = \angle ACB$। প্রমাণ করিতে হইবে যে $AB = AC$।

অঙ্কন। BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক আঁক যাহা BC-এর সহিত D-বিন্দুতে মিলিত হয়।

প্রমাণ। ABD ও ACD ত্রিভুজে,

$\angle ABD = \angle ACD$, $\angle BAD = \angle CAD$.

AD উহাদের সাধারণ বাহু।

সুতরাং $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$.

অতএব $AB = AC$.

দ্রষ্টব্য। এই প্রতিজ্ঞাটি উপপাদ্য 9-এর বিপরীত প্রতিজ্ঞা।

অনুসিদ্ধান্ত। কোন ত্রিভুজের তিনটি কোণ পরস্পর সমান হইলে, ত্রিভুজটি সমবাহু হইবে। [If the three angles of a triangle are equal, all its sides are also equal.]

অনুশীলনী 28

1. কোন ত্রিভুজের ভূমি উভয়দিকে বর্ধিত হইলে যদি উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ দুইটি সমান হয়, তবে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে। If the exterior angles formed by producing the base of a triangle both ways be equal, then the triangle is isosceles. (C. U 1924)

2. কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু অসমান হইলে উহাদের বিপরীত কোণ দুইটিও অসমান।

Angles opposite to unequal sides of a triangle are unequal.

3. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভৌমিক কোণের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি মিলিত হইয়া একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। The bisectors of the base angles of an isosceles triangle meet together to form an isosceles triangle.

4. কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটি একভাবে একই দিকে বর্ধিত হইলে যদি উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণগুলি পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজটি সমবাহু হইবে।

If the exterior angles formed by producing the sides of a triangle in order and in the same direction are equal, then the triangle is equilateral. (C. U. 1924)

5. ABCD চতুর্ভুজের $AB=AD$, $\angle B=\angle D$; প্রমাণ কর যে $BC=CD$.

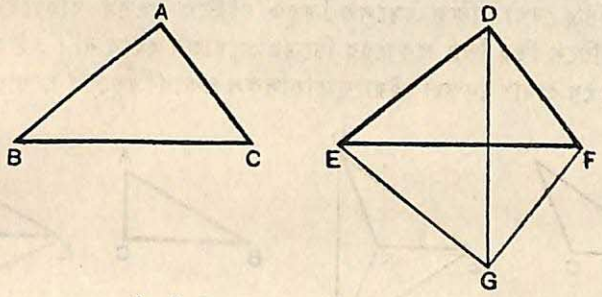
6. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $AB=AC$, AB ও AC-কে বর্ধিত করিয়া উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ দুইটিকে সমদ্বিখণ্ডিত কর এবং মনে কর এই সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O-বিন্দুতে মিলিত হইল ; প্রমাণ কর যে EOC ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

7. AEC ত্রিভুজের $\angle B$ এবং $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O-বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে এবং $OB=CC$; প্রমাণ কর যে $\triangle AEC$ সমদ্বিবাহু।

উপপাদ্য 11

একটি ত্রিভুজের তিন বাহু অপর একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর সহিত যথাক্রমে সমান হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

[If two triangles have three sides of the one respectively equal to three sides of the other, the triangles are congruent.]



ABC এবং DEF এই দুই ত্রিভুজের মধ্যে AB = DE, BC = EF, CA = FD,

প্রমাণ করিতে হইবে যে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

প্রমাণ। মনে কর BC ও EF ত্রিভুজ দুইটির বৃহত্তম বাহু।

△ABC-কে △DEF-এর উপর এইরূপে স্থাপন কর, যেন B-বিন্দু E-বিন্দুর উপর, BC বাহু EF বাহুর বরাবর এবং EF বাহুর যে পার্শ্বে D আছে A-বিন্দু তাহার বিপরীত পার্শ্বে G-বিন্দুর উপর পতিত হয়।

যেহেতু BC = EF, সুতরাং C বিন্দু F-বিন্দুর উপর পতিত হইবে। ইহাতে BC বাহু EF বাহুর উপর সমাপতিত হইবে।

তাহা হইলে, △GEF, △ABC এর নূতন অবস্থান হইল। D ও G সংযুক্ত কর।

DEG ত্রিভুজে ED = EG (∵ EG = BA), ∴ ∠EDG = ∠EGD.

আবার DFG ত্রিভুজে FD = FG (∵ FG = CA) ∴ ∠FDG = ∠FGD.

সুতরাং সমগ্র ∠EDF = সমগ্র ∠EGF, অর্থাৎ, ∠BAC = ∠EDF.

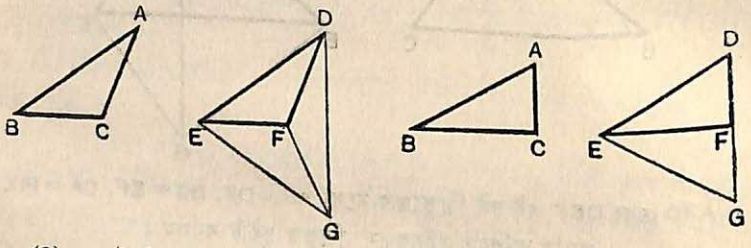
এখন, ABC ও DEF ত্রিভুজে AB = DE, AC = DF.

অন্তর্ভূত ∠BAC = অন্তর্ভূত ∠EDF,

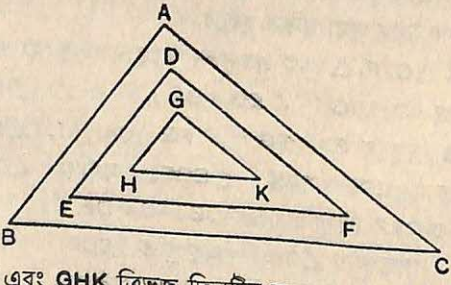
∴ △ABC ও △DEF সর্বসম।

দ্রষ্টব্য। (1) ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হওয়ায় $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ এবং উভয় ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান। $AB = DE$, $BC = EF$ এবং $CA = FD$ (কল্পনা)। এস্থলেও সমান সমান কোণগুলি সমান সমান বাহুর বিপরীত।

(2) উক্ত ত্রিভুজ দুইটির $\angle C$ ও $\angle F$ স্থূলকোণ বা সমকোণ হইলে এব প্রত্যেক স্থলেই BC বাহুকে EF বাহুর বরাবর স্থাপন করিলে DG সরলরেখা EF সরলরেখার বাহিরে পড়িবে অথবা DF সরলরেখার সহিত মিলিয়া যাইবে (নীচের চিত্র দেখ)। কিন্তু এস্থলেও ত্রিভুজ দুইটিকে বৃহত্তম বাহুদ্বয়ের বরাবর স্থাপন করিলে ভিন্ন ভিন্ন প্রকারের চিত্রের প্রয়োজন হইবে না। এই জন্যই মূল উপপাদ্যে যে প্রমাণ দেওয়া হইয়াছে তাহা সকল প্রকার ত্রিভুজেই প্রযোজ্য হইবে।



(3) একটি ত্রিভুজের তিন বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর সমান হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হয়, ফলে উভয় ত্রিভুজের অনুরূপ কোণগুলিও পরস্পর সমান হয়; কিন্তু একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমান হইলে ত্রিভুজ দুইটি সমান নাও হইতে পারে। নীচের চিত্র হইতে ইহা বুঝা যাইবে।



ABC, DEF এবং GHK ত্রিভুজ তিনটির অনুরূপ কোণগুলি পরস্পর সমান, কিন্তু ত্রিভুজ তিনটি যে সর্বসম নহে ইহা স্পষ্টই বুঝা যাইতেছে।

অনুশীলনী 29

1, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত মধ্যমা শিরঃকোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং ভূমির উপর লম্ব হয়। The median drawn from the vertex of an isosceles triangle to the base bisects the vertical angle and is perpendicular to the base.

2. প্রমাণ কর যে রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

Prove that the diagonals of a rhombus bisect one another at right angles. (C. U. 1935)

3. একই ভূমির উপর অবস্থিত দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা শিরঃকোণদ্বয়কে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং সাধারণ ভূমিকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

4. কোন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি সমান হইলে, বিপরীত কোণগুলিও সমান হইবে। If the opposite sides of a quadrilateral are equal, its opposite angles are also equal.

5. সমবাহু ত্রিভুজের তিন বাহুর মধ্যবিন্দু তিনটি যোগ করিলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তাহাও সমবাহু। The triangle formed by joining the middle points of the sides of an equilateral triangle is also equilateral.

6. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC, এবং ∠B ও ∠C-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O-বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে AO, ∠A-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

7. কোন বৃত্তের পরিধির উপর P, Q, R তিনটি বিন্দু এমনভাবে লওয়া হইল যে, PQ = QR ; বৃত্তের কেন্দ্র যদি O হয়, প্রমাণ কর যে OQ সরলরেখা PQR কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

8. ABCD রম্বসের মধ্যে A ও C হইতে সমদূরবর্তী P যে কোন একটি বিন্দু ; প্রমাণ কর যে PB ও PD একই সরলরেখায় অবস্থিত। (C. U. 1945

[**প্রমাণ**। AB = BC, PA = PC, PB সাধারণ, ∴ △APB ≡ △CPB.

∴ ∠APB = ∠CPB। তদ্রূপ, ∠APD = ∠CPD.

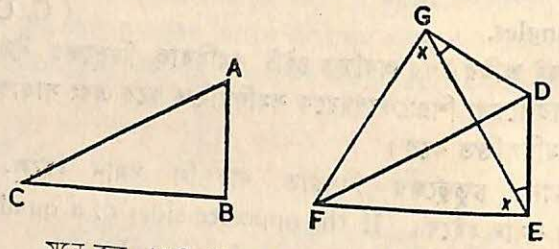
∴ ∠APB + ∠APD = ∠CPB + ∠CPD = $\frac{1}{2}$. 4 সম∠ = 2 সম ∠.

∴ PB, PD একই সরলরেখায় অবস্থিত।]

উপপাদ্য 12

দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজদ্বয় পরস্পর সমান এবং একটির এক বাহু অপরটির এক বাহুর সমান হইলে, ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

[Two right-angled triangles which have their hypotenuses equal and one side of the one equal to one side of the other, are equal in all respects.]



মনে কর, ABC এবং DEF সমকোণী ত্রিভুজ দুইটির অতিভুজ AC = অতিভুজ DF এবং AB বাহু = DE বাহু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

প্রমাণ। ABC ত্রিভুজকে DEF ত্রিভুজের উপর এইরূপে স্থাপন কর যেন A-বিন্দু D-বিন্দুর উপর, AC বাহু DF বাহুর বরাবর এবং DF-এর যে দিকে E-বিন্দু আছে B-বিন্দু তাহার বিপরীত দিকে G-বিন্দুর উপর পতিত হয়।

এখন, যেহেতু AC = DF, সুতরাং C-বিন্দু F-বিন্দুর উপর পতিত হইবে।

তাহা হইলে DGF ত্রিভুজ, ABC ত্রিভুজের নূতন অবস্থান হইল।

GE যোগ কর।

DEG ত্রিভুজে $DE = DG$, $\therefore \angle DEG = \angle DGE$

$\angle DEF = \angle DGF$ (সমকোণ বলিয়া)

$\therefore \angle DEF - \angle DEG = \angle DGF - \angle DGE$

অর্থাৎ $\angle GEF = \angle EGF$, $\therefore FG = FE = BC$

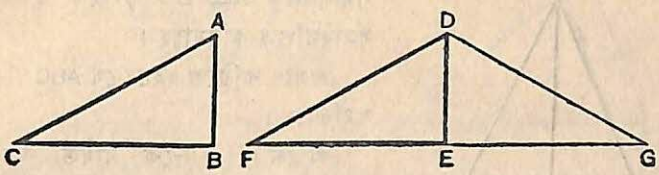
এখন, ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ে,

AC = DF, AB = DE এবং BC = EF.

সুতরাং ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

বিকল্প প্রমাণ।

প্রমাণ। ABC ত্রিভুজটিকে DEF ত্রিভুজের উপর এমনভাবে স্থাপন কর যেন A-বিন্দু D-বিন্দুর উপর এবং AB বাহু DE বাহুর উপর পতিত হয় এবং



DE বাহুর যে পার্শ্বে F আছে, C-বিন্দু তাহার বিপরীত দিকে G-বিন্দুর উপর পতিত হয়। এখন যেহেতু AB = DE, ∴ B বিন্দু E-বিন্দুর উপর পড়িবে।

তাহা হইলে, DEG ত্রিভুজ, ABC ত্রিভুজের নূতন অবস্থান হইল।

∠DEF ও ∠DEG প্রত্যেকে সমকোণ, ∴ EF ও EG একই সরলরেখায় অবস্থিত।

∴ DFG একটি ত্রিভুজ এবং ইহার DF বাহু = DG বাহু,

∴ ∠DFG = ∠DGF অর্থাৎ ∠DFE = ∠DGE.

সুতরাং DEG এবং DEF ত্রিভুজ দুইটির

সম ∠DEG = সম ∠DEF, ∠DGE = ∠DFE এবং DE সাধারণ বাহু ;

∴ DEG ও DEF অর্থাৎ ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

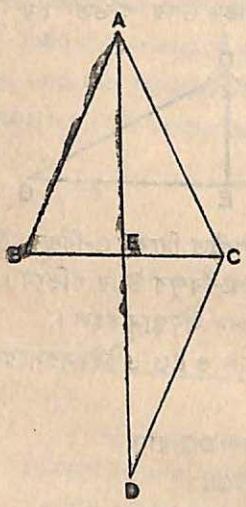
অনুশীলনী 30

1. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব টানা হইলে উহারা পরস্পর সমান হয়। In an isosceles triangle the perpendiculars drawn from the ends of the base to the opposite sides are equal.

2. ত্রিভুজের কোন কোণের সমদ্বিখণ্ডক ঐ কোণের বিপরীত বাহুর উপর লম্ব হইলে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে। If the bisector of an angle of a triangle be perpendicular to the side opposite to the angle, then the triangle is isosceles.

*3. যদি কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকেও সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহা হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু। If the bisector of the

vertical angle of a triangle also bisects the base, then the triangle is isosceles. (C.U. 1937)



মনে কর ABC ত্রিভুজের $\angle BAC$-র সমদ্বিখণ্ডক AE, BC ভূমিকে E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে ABC ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

অঙ্কন। AE-কে বর্ধিত কর এবং বর্ধিতাংশ হইতে AE-র সমান করিয়া ED অংশ কাটিয়া লও। DC সংযুক্ত কর।

প্রমাণ। AEB, DEC ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম, যেহেতু $AE = ED$, $BE = EC$, $\angle AEB = \angle CED$ $\therefore$ $AB = CD$ এবং $\angle BAE = \angle CDE$,

কিন্তু $\angle BAE = \angle CAE$,

$\therefore$ $\angle CAE = \angle CDE$

$\therefore$ $AC = CD = AB$. অর্থাৎ ABC ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু।

4. ABC ত্রিভুজের $\angle B = \angle C$ এবং উহাদের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় AC ও AB-তে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর, $BD = CE$. (C. U. 1929)

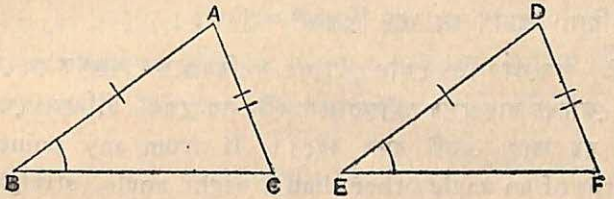
5. কোন কোণের সমদ্বিখণ্ডকের অন্তর্গত যে কোন বিন্দু কোণটির দুই বাহু হইতে সমদূরবর্তী। Any point on the bisector of an angle is equidistant from the arms of the angle. (C. U. 1950)

6. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে ভূমির উপর লম্ব ভূমি ও শিরঃকোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। The perpendicular from the vertex of an isosceles triangle to the base bisects the base and also the vertical angle.

7. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $AC = BC$; AD, BAC কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে; প্রমাণ কর $AC + CD = AB$.

*8. দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একটির দুই বাহু এবং উহাদের যে কোন একটির

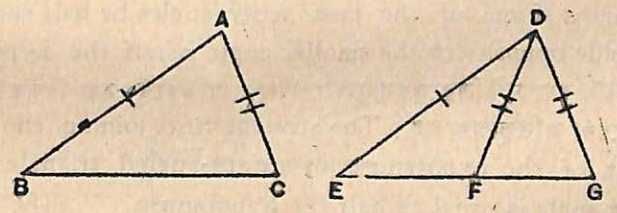
বিপরীত কোণ যথাক্রমে অপর ত্রিভুজের দুই বাহু এবং অনুরূপ কোণের সমান হইলে, অপর দুই সমান বাহুর বিপরীত কোণ দুইটি সমান বা সম্পূরক হইবে।



ABC, DEF ত্রিভুজ দুইটির AB = DE, AC = DF এবং $\angle ABC = \angle DEF$; যদি $\angle BAC = \angle EDF$ হয়, তাহা হইলে উহাদের তৃতীয় কোণ দুইটি অবশ্যই সমান হইবে।

অর্থাৎ $\angle ACB = \angle DFE$ হইবে।

যদি $\angle BAC$, $\angle EDF$ এর সমান না হয়, মনে কর $\angle BAC > \angle EDF$। এখন D-বিন্দুতে DE-র সহিত $\angle BAC$ এর সমান করিয়া $\angle EDG$ অঙ্কিত কর এবং মনে কর DG বর্ধিত EF-কে G-বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে ABC, DEG ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।



$\therefore$ DG = AC এবং $\angle DGF = \angle ACB$

কিন্তু DG = AC = DF, $\therefore$ $\angle DFG = \angle DGF$.

অতএব $\angle ACB = \angle DFG$.

কিন্তু $\angle DFG$ ও $\angle DFE$ পরস্পর সম্পূরক ; $\therefore$ $\angle ACB$ ও $\angle DFE$ পরস্পর সম্পূরক।

9. সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দু হইতে উহাদের বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব তিনটি পরস্পর সমান।

10. একই ভূমির বিপরীত পার্শ্বে দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিলে উহারা একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে। Two equilateral triangles standing on opposite sides of the same base form a parallelogram. (C. U. 1916)

11. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের BC ভূমিস্থ D-বিন্দু হইতে ভূমির উপর একটি লম্ব টান ; এই লম্ব AC-কে E-বিন্দুতে এবং বর্ধিত BA-কে F-বিন্দুতে ছেদ করিল ; প্রমাণ কর AEF ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

12. সমকোণ ভিন্ন কোন কোণের সমদ্বিখণ্ডকের অন্তর্গত যে কোন বিন্দু হইতে কোণের বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল দুইটি সরলরেখা টানিলে যে চতুর্ভুজ উৎপন্ন হয় তাহা একটি রম্বস হইবে। If from any point on the bisector of an angle other than a right angle, straight lines are drawn parallel to each arm, then the resulting quadrilateral is a rhombus.

*13. ABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ BC-র অন্তর্গত কোন D-বিন্দু A-বিন্দুর সহিত সংযুক্ত করা হইয়াছে। যদি $\angle BAD = \angle ABD$ হয়, তবে প্রমাণ কর D, BC-র মধ্যবিন্দু এবং AD, BC-র অর্ধ।

*14. সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ দুইটির একটি অপরটির অর্ধ হইলে, ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অতিভুজের অর্ধ হইবে। In a right-angled triangle, if one of the two acute angles be half the other, the side opposite to the smaller angle is half the hypotenuse.

*15. সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ-বিন্দু ও অতিভুজের মধ্য-বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা অতিভুজের অর্ধ। The straight line joining the middle point of the hypotenuse of a right-angled triangle to the right angle is equal to half the hypotenuse. (D. B. 1933)

ইঙ্গিত। ABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ AC-র মধ্যবিন্দু D-র সহিত সমকোণবিন্দু B সংযুক্ত কর। BD-কে E পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন DE = BD হয়। EC সংযুক্ত কর।

এখন, $\triangle ABD \equiv \triangle DEC$। $\therefore$ AB = EC, এবং $\angle BAD = \angle DCE$,

$\therefore$ $\angle BCE = \angle BCA + \angle DCE = \angle BCA + \angle BAC =$ এক সমকোণ,

কারণ $\angle ABC =$ এক সমকোণ। আবার $\triangle ABC \equiv \triangle ECB$ $\therefore$ AC = BE,

অতএব, $BD = \frac{1}{2} BE = \frac{1}{2} AC$.

16. ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর উপর ABC ত্রিভুজের বহির্দেশে DAB এবং ACE দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে BE = CD.

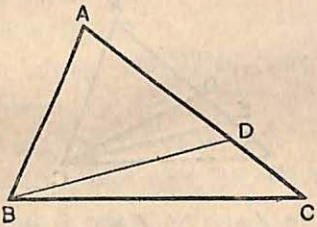
17 ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং D উহার অন্তঃস্থ যে কোন বিন্দু। DC-র উপর DCE আর একটি সমবাহু ত্রিভুজ এইরূপে অঙ্কিত করা হইয়াছে যে DE, AC-কে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে $\triangle ACE$ ও $\triangle BCD$ সর্বসম।

18. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC ; BA-কে D পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন AD = AB হয়। DC যুক্ত করিয়া প্রমাণ কর $\angle DCB$ সমকোণ।

উপপাদ্য 13

ত্রিভুজের এক বাহু অপর এক বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ, ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

[If one side of a triangle be greater than another, then the angle opposite to the greater side is greater than the angle opposite to the less.]



মনে কর ABC ত্রিভুজের AC বাহু AB বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

AC বাহুর বিপরীত $\angle ABC$ > AB বাহুর বিপরীত $\angle ACB$.

অঙ্কন। AC বাহু হইতে AB বাহুর সমান করিয়া AD অংশ কাটিয়া লও। BD যুক্ত কর।

প্রমাণ। ABD ত্রিভুজে AB = AD, $\therefore$ $\angle ABD = \angle ADB$.

কিন্তু BCD ত্রিভুজের CD বাহু বর্ধিত হওয়ায় বহিঃকোণ ADB > বিপরীত অন্তঃকোণ DCB অর্থাৎ > $\angle ACB$ $\therefore$ $\angle ABD > \angle ACB$.

সুতরাং সমগ্র ABC কোণ, ACB কোণ অপেক্ষা আরও বৃহত্তর।

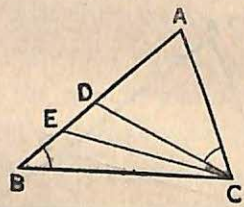
প্রশ্ন। BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সাহায্যে এই প্রতিজ্ঞাটি প্রমাণ কর।

[ইঙ্গিত। মনে কর BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক BC-র সহিত E-বিন্দুতে মিলিত হইল। AC হইতে AB-এর সমান AD অংশ কাট। ED যুক্ত কর। ABE ও ADE ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। সুতরাং $\angle ABE = \angle ADE$। কিন্তু CDE ত্রিভুজের CD বাহু বর্ধিত হওয়ায় বহিঃ $\angle ADE >$ দূরবর্তী অন্তঃ $\angle DCE$। সুতরাং $\angle ABC > \angle ACB$.]।

উপপাদ্য 14

ত্রিভুজের একটি কোণ অপর একটি কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, বৃহত্তর কোণটির বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণটির বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

[If one angle of a triangle be greater than another, then the side opposite to the greater angle is greater than the side opposite to the less.]



মনে কর ABC ত্রিভুজের $\angle ACB > \angle ABC$.

প্রমাণ করিতে হইবে $AB > AC$.

অঙ্কন। $\angle ABC$-এর সমান করিয়া ACD কোণ আঁক যেন CD, AB-কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

BCD কোণের সমদ্বিখণ্ডক আঁক যাহা DB-কে E-বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ। $\angle ACE = \angle ACD + \angle DCE$.

কিন্তু $\angle ACD = \angle ABC$ এবং $\angle DCE = \angle ECB$ (অঙ্কন)

$\therefore \angle ACE = \angle ABC + \angle ECB =$ বহিঃ $\angle AEC$.

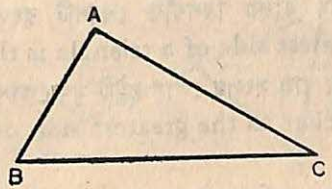
$\therefore AE = AC$

এখন, $AB > AE$, কিন্তু $AE = AC$.

$\therefore AB > AC$.

বিকল্প প্রমাণ।

মনে কর ABC ত্রিভুজের $\angle ABC > \angle ACB$
প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AC > AB$.



প্রমাণ। AC বাহু AB বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর না হইলে, হয় ইহা AB-র সমান, নতুবা AB অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

যদি $AC = AB$ হয়, তাহা হইলে, $\angle ABC = \angle ACB$;
কিন্তু এইরূপ সিদ্ধান্ত কল্পনাবিরুদ্ধ।
সুতরাং $AC = AB$ হইতে পারে না।
আবার, যদি $AC < AB$ হয়, তাহা হইলে $\angle ABC < \angle ACB$;
কিন্তু ইহাও কল্পনাবিরুদ্ধ।
সুতরাং $AC < AB$ হইতে পারে না।
অতএব AC বাহু AB বাহুর সমান অথবা তদপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নহে।

$$\therefore \quad AC > AB.$$

দ্রষ্টব্য। এই উপপাদ্যটি ত্রয়োদশ উপপাদ্যের বিপরীত।

মন্তব্য। এই উপপাদ্যটির সাধ্য বিষয় $AC > AB$. এই সিদ্ধান্ত অস্বীকার করিলে AC, AB-র সমান বা তদপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে, এতদ্ব্যতীত অন্য কোন সিদ্ধান্তের কল্পনা সম্ভব নহে। কিন্তু প্রমাণ করিয়া দেখান হইয়াছে যে শেষোক্ত সিদ্ধান্ত দুইটি স্বীকার করিলে কল্পিত বা স্বীকৃত বিষয়কেই অস্বীকার করা হয়। সুতরাং শেষোক্ত সিদ্ধান্তদ্বয়ের কল্পনা ত্যাগ করিয়া মূল সিদ্ধান্তটিকেই স্বীকার করিয়া লওয়া হইয়াছে। এইরূপ প্রমাণ পদ্ধতিকে **বিকল্প-খণ্ডন প্রমাণ** (Proof by Exhaustion) বলে।

অনুশীলনী 31

1. ত্রিভুজের বাহুগুলি অসমান হইলে কোণগুলিও অসমান হইবে।
If the sides of a triangle are unequal, its angles are also unequal.

2. ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণটি বৃহত্তম। The angle opposite to the greatest side of a triangle is the greatest.

3. ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু সংলগ্ন কোণ দুইটি সূক্ষ্মকোণ।
The angles adjacent to the greatest side of a triangle are acute.

4. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজই বৃহত্তম বাহু। The hypotenuse is the greatest side of a right-angled triangle. (C. U. 1914)

5. ত্রিভুজের বৃহত্তম কোণের বিপরীত বাহুই বৃহত্তম।
The side opposite to the greatest angle of a triangle is the greatest.

6, ত্রিভুজের কোণগুলি অসমান হইলে বাহুগুলিও অসমান হইবে।
If the angles of a triangle are unequal, then its sides are also unequal.

7. ABC ত্রিভুজের $\angle B$ ও $\angle C$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O-বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। যদি $AB > AC$ হয়, তবে প্রমাণ কর $BO > CO$.

8. কোন চতুর্ভুজের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম বাহু পরস্পর বিপরীত হইলে, ক্ষুদ্রতম বাহুর সংলগ্ন প্রত্যেক কোণ উহার বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।
If in a quadrilateral the greatest and the least sides are opposite to one another, then each of the angles at the ends of the least side is greater than its opposite angle.
(C. U. 1918, 1940)

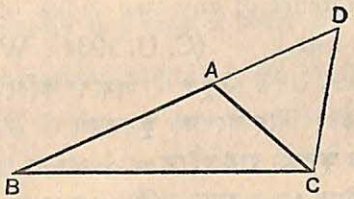
9. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং P, BC ভূমির উপর যে কোন বিন্দু। AP সংযুক্ত কর। প্রমাণ কর $AP < AB$ অথবা AC.

10. ABC ত্রিভুজের $\angle A$-এর সমদ্বিখণ্ডক BC বাহুর সহিত D-বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। যদি $AB > AC$ হয়, তবে প্রমাণ কর $BD > CD$.

উপপাদ্য 15

ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

[Any two sides of a triangle are together greater than the third side.]



ABC একটি ত্রিভুজ। প্রমাণ করিতে হইবে যে ইহার যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

মনে কর BC উহার বৃহত্তম বাহু। তাহা হইলে, (AB + AC)-কে BC অপেক্ষা বৃহত্তর প্রমাণ করিলেই যথেষ্ট হইবে।

অঙ্কন। BA-কে D পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন AD = AC হয়। DC যুক্ত কর।

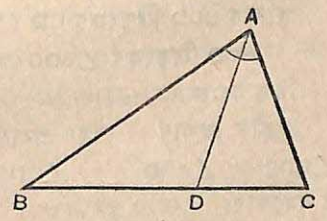
প্রমাণ। ACD ত্রিভুজে, AC = AD ; $\therefore$ $\angle ACD = \angle ADC$।

$\therefore$ $\angle BCA + \angle ACD > \angle ADC$; অর্থাৎ $\angle BCD > \angle BDC$।

অতএব, BCD ত্রিভুজের BD বাহু BC বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

কিন্তু BD = BA + AD = BA + AC $\therefore$ BA + AC > BC.

বিকল্প প্রমাণ। মনে কর $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক BC-কে D-বিন্দুতে ছেদ করে।



ABD ত্রিভুজের BD বাহু C পর্যন্ত বর্ধিত হইয়াছে, সুতরাং $\angle ADC > \angle BAD$ অর্থাৎ $\angle ADC > \angle CAD$.

অতএব ACD ত্রিভুজের AC > DC (1)

আবার ACD ত্রিভুজের CD বাহু B পর্যন্ত বর্ধিত হইয়াছে, $\therefore$ $\angle ADB > \angle CAD$, অর্থাৎ $\angle ADB > \angle BAD$, অতএব ABD ত্রিভুজের AB > BD (2)

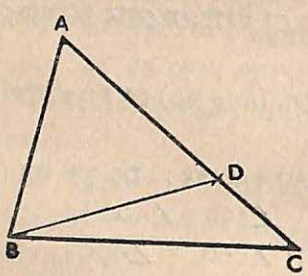
(1) ও (2) হইতে AB + AC > BD + DC, $\therefore$ AB + AC > BC.

মন্তব্য। দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাই বিন্দু দুইটির মধ্যে ন্যূনতম দূরত্ব ইহা স্বীকার করিয়া লইলে, (AB+AC) অপেক্ষা BC যে ক্ষুদ্রতর ইহার প্রমাণের আর আবশ্যক হয় না।

অনুসিদ্ধান্ত। ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর অন্তর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। [The difference of any two sides of a triangle is less than the third side.] (C. U. 1934 ; W. B. S. B. 1952)

প্রথম প্রমাণ। ABC একটি ত্রিভুজ। প্রমাণ করিতে হইবে ইহার যে কোন দুই বাহুর অন্তর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

AC বৃহত্তম এবং AB ক্ষুদ্রতম বাহু হইলে AC−AB < BC প্রমাণ করিলেই যথেষ্ট হইবে। AC হইতে AB-র সমান করিয়া AD অংশ কাট।



এখন, AB+BC > AC

বা AB+BC > AD+DC

∴ BC > DC (∵ AB=AD)

বা BC > AC−AD

বা BC > AC−AB

সুতরাং AC−AB < BC.

দ্বিতীয় প্রমাণ। উক্ত চিত্রে ABC ত্রিভুজে, মনে কর AC > AB। AC হইতে AB-র সমান AD অংশ কাটিয়া লও। BD যুক্ত কর।

AB=AD, ∴∠ABD=∠ADB ; ABD ত্রিভুজের AD বাহু C পর্যন্ত বর্ধিত,

∴ ∠BDC > ∠ABD ∴ ∠BDC > ∠ADB

আবার BCD ত্রিভুজের CD বাহু A পর্যন্ত বর্ধিত, ∴ ∠ADB > ∠DBC.

∴ BCD ত্রিভুজের ∠BDC > ∠DBC, BC > DC, ∴ DC < BC

কিন্তু DC=AC−AD=AC−AB, ∴ AC−AB < BC,

তৃতীয় প্রমাণ। প্রথম প্রমাণের চিত্রে AB = AD ∴ ∠ABD=∠ADB. ∠BDC > ∠ABD, ∴ ∠BDC > ∠ADB. কিন্তু ∠ADB+∠BDC= 2 সমকোণ, BDC স্থূলকোণ ∴ ∠DBC সূক্ষ্মকোণ ∴ ∠BDC>∠DBC,

∴ BC > DC, DC < BC অর্থাৎ AC−AB < BC.

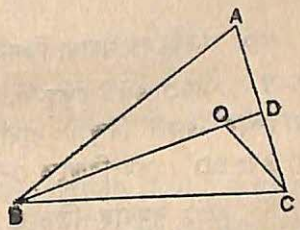
মন্তব্য। ABC ত্রিভুজের AB=AC হইলে আর প্রমাণের আবশ্যক হয় না, কারণ AC−AB=0 (ইহা BC অপেক্ষা অবশ্যই ক্ষুদ্রতর)।

অনুশীলনী 32

*1. চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের সমষ্টি পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, কিন্তু অর্ধপরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর। The sum of the diagonals of a quadrilateral is less than the perimeter but greater than the semiperimeter.

*2. কোন ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে উহার যে কোন বাহুর প্রান্ত বিন্দুদ্বয়ের দূরত্বের সমষ্টি উহার অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। The sum of the distances of any point within a triangle from the extremities of any side is less than the sum of the other two sides.

ABC ত্রিভুজের মধ্যে O একটি বিন্দু। BO, CO সংযুক্ত কর। BO বর্ধিত কর যেন ইহা AC-কে D-বিন্দুতে ছেদ করে।



BAD ত্রিভুজে, $AB+AD > OB+OD$

এবং COD ত্রিভুজে, $DC+OD > OC$.

$\therefore AB+(AD+DC)+OD > OB+OC+OD$.

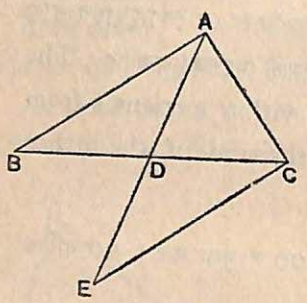
$\therefore AB+AC > OB+OC$ (উভয় পক্ষ হইতে OD বাদ দিয়া)।

*3. ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কৌণিক বিন্দুত্রয়ের দূরত্বেরসমষ্টি ত্রিভুজের পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। The sum of the distances of any point within a triangle from its angular points is less than the perimeter of the triangle. (C. U. 1939)

4. যে কোন বিন্দু হইতে ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুত্রয়ের দূরত্বের সমষ্টি ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর। The sum of the distances of any point from the three angular points of a triangle is greater than half its perimeter.

*5. ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার দ্বিগুণ অপেক্ষা বৃহত্তর। In a triangle any two sides are together greater than twice the median which bisects the third side.

(C U. 1923)



ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D. AD সংযুক্ত করিয়া উহাকে E-বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন DE = AD হয়। CE সংযুক্ত কর। AD = DE, BD = DC, $\angle ADB = \angle CDE$;

$\therefore$ ABD, CDE ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

$\therefore$ AB = CE.

আবার CE + AC > AE,

$\therefore$ AB + AC > AE,

অর্থাৎ AB + AC > 2AD,

*6. ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটির সমষ্টি উহার পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

7. ABCD একটি চতুর্ভুজ, AC ও BD উহার কর্ণ, এবং O উহার অন্তঃস্থ যে কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ কর OA + OB + OC + OD > AC + BD। AC এবং BD-র ছেদ-বিন্দুতে O-বিন্দুর অবস্থান হইলে কি ব্যতিক্রম হইবে?

8. ABC সমবাহু ত্রিভুজে O একটি অন্তঃস্থ বিন্দু। প্রমাণ কর যে OA, OB, OC ইহাদের যে কোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর।

9. চতুর্ভুজের যে কোন তিনটি বাহুর সমষ্টি চতুর্থ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। The sum of any three sides of a quadrilateral is greater than the fourth side.

10. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর পরিমাণ 2 ও 3; প্রমাণ কর যে তৃতীয় বাহুটি 5 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কিন্তু 1 অপেক্ষা বৃহত্তর।

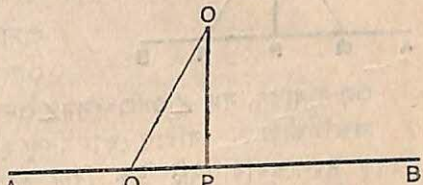
11. ABC ত্রিভুজের বৃহত্তম কোণ A হইলে, প্রমাণ কর যে AB, AC, 2BC বাহু লইয়া কোন ত্রিভুজ অঙ্কন অসম্ভব।

(C. U. 1946)

উপপাদ্য 16

কোন সরলরেখার বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ সরলরেখা পর্যন্ত যতগুলি সরলরেখা টানা যায়, তাহাদের মধ্যে লম্বই ক্ষুদ্রতম।

[Of all straight lines drawn from a given point to a given straight line the perpendicular is the shortest.]



মনে কর AB একটি সরলরেখা এবং O একটি বহিঃস্থ বিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে O হইতে AB-র উপর যতগুলি সরলরেখা অঙ্কিত করা যায় তন্মধ্যে যেটি লম্ব সেইটিই ক্ষুদ্রতম।

অঙ্কন। O হইতে AB-র উপর OP লম্ব এবং অপর যে কোন একটি সরলরেখা OQ টান।

প্রমাণ। OPQ ত্রিভুজের QP বাহু B-বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত,

$\therefore$ বহিঃ $\angle OPB >$ বিপরীত অন্তঃ $\angle OQP$;

কিন্তু $\angle OPB = \angle OPQ$ (প্রত্যেকে এক সমকোণ বলিয়া)

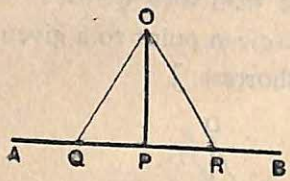
$\therefore$ $\angle OPQ > \angle OQP$. অতএব $OQ > OP$ অর্থাৎ $OP < OQ$. AB-র অন্তর্গত যে কোন Q-বিন্দুর পক্ষে ইহা সত্য। সুতরাং লম্ব OP ক্ষুদ্রতম।

দূরত্ব ও তির্যক্—কোন সরলরেখার উপর বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে পাতিত লম্বকে উক্ত বিন্দু হইতে সরলরেখাটির **দূরত্ব** (Distance) এবং লম্ব ব্যতীত অপর যে কোন সরলরেখাকে **তির্যক্** সরলরেখা (Oblique) বলে।

অনুসিদ্ধান্ত 1. বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন সরলরেখার উপর ক্ষুদ্রতম সরলরেখাই উহার উপর লম্ব। [The shortest straight line from a given point to a given straight line is the perpendicular to it.]

বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন সরলরেখার উপর একটি মাত্র লম্ব এবং একটি মাত্র ক্ষুদ্রতম সরলরেখা টানা যায়, এবং যেহেতু বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন সরলরেখার উপর লম্বই ক্ষুদ্রতম সরলরেখা, সুতরাং ক্ষুদ্রতম সরলরেখাই উহার উপর লম্ব।

অনুসিদ্ধান্ত 2. বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে দুইটি তির্যক্ সরলরেখা কোন সরলরেখার সহিত উক্ত বিন্দু হইতে পাতিত লম্বের পাদবিন্দুর সমান দূরে মিলিত হইলে, তির্যক্ দুইটি পরস্পর সমান।



O-বিন্দু হইতে OQ, OR তির্যক্ সরলরেখা দুইটি AB সরলরেখার সহিত OP লম্বের পাদ-বিন্দু P হইতে সমান দূরে মিলিত হইয়াছে।

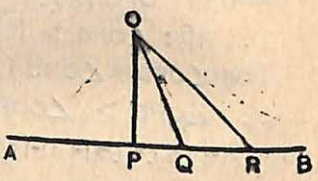
প্রমাণ করিতে হইবে OQ = OR।

OPQ, OPR ত্রিভুজ দুইটির PQ = PR, OP সাধারণ, সম $\angle OPQ = \angle OPR$, $\therefore$ OQ = OR.

অনুসিদ্ধান্ত 3. বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন সরলরেখার উপর দুইটি তির্যক্ সরলরেখার যেটি উক্ত বিন্দু হইতে পাতিত লম্বের পাদবিন্দু হইতে অধিকতর দূরে সরলরেখার সহিত মিলিত হয় তাহা অপরটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

O-বিন্দু হইতে AB-র উপর OP লম্ব এবং OQ, OR দুইটি তির্যক্ সরলরেখা অঙ্কিত হইয়াছে, এবং PR > PQ। প্রমাণ করিতে হইবে OR > OQ।

বহিঃ $\angle OQR >$ বিপরীত অন্তঃ $\angle OPQ$
কিন্তু OPQ সমকোণ, $\therefore \angle OQR$ স্থূলকোণ,
$\therefore \angle ORQ$ সূক্ষ্মকোণ, $\therefore \angle OQR > \angle ORQ$,
$\therefore$ OR > OQ.



অনুশীলনী 33

1. কোন ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে ভূমি পর্যন্ত যতগুলি সরলরেখা টানা যায় তাহাদের প্রত্যেকটি অপেক্ষা ত্রিভুজের অপর দুই বাহুর বৃহত্তরটি বৃহত্তর।

2. সমবাহু ও সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির উপর অঙ্কিত মধ্যমা শীর্ষ হইতে ভূমি পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখা সমূহের প্রত্যেকটি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

3, ABC ত্রিভুজের BC বৃহত্তম বাহু ; A হইতে BC-র উপর AN লম্ব টান। প্রমাণ কর যে, AB > BN, AC > CN এবং AB + AC > BC.

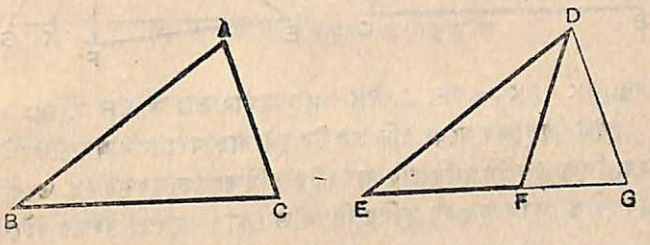
4. সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজই বৃহত্তম বাহু।

5. (উপ. 16-এর তৃতীয় অনুসি. চিত্রে) OR > OQ ; প্রমাণ কর PR > PQ।

6. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষের সহিত ভূমির যে কোন বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা উহার সমান বাহু দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

দুইটি অতিরিক্ত প্রতিজ্ঞা

1. দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে যদি একটির দুই বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই বাহুর সমান হয়, কিন্তু উহাদের অন্তর্ভূত কোণদ্বয়ের একটি যদি অপরটি অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তাহা হইলে বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।



মনে কর ABC, DEF ত্রিভুজ দুইটির $AB = DE$, $AC = DF$

কিন্তু $\angle BAC > \angle EDF$

প্রমাণ করিতে হইবে $BC > EF$.

প্রমাণ। ABC ত্রিভুজকে DEF ত্রিভুজের উপর এমনভাবে স্থাপন কর যেন A-বিন্দু D-বিন্দুর উপর এবং AB বাহু DE বাহুর বরাবর পতিত হয়।

যেহেতু $AB = DE$, $\therefore$ B-বিন্দু E-বিন্দুর উপর পতিত হইবে।

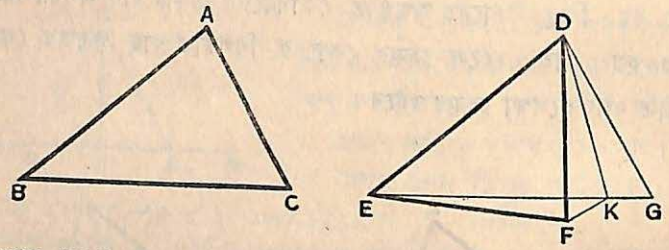
মনে কর DG এবং GE, AC এবং CB-র নূতন অবস্থান হইল।

আবার, যেহেতু AB, DE-র সহিত মিলিত হইয়াছে এবং $\angle BAC > \angle EDF$, সুতরাং AC বাহু EDF কোণের বহির্দেশে পড়িবে।

এক্ষণে, যদি EG ও EF একই সরলরেখা হয়, তবে $EG > EF$ অর্থাৎ $BC > EF$.

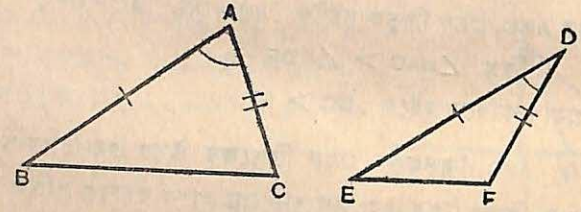
কিন্তু যদি EG ও EF এক সরলরেখা না হয়, মনে কর DK, $\angle FDG$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া EG সরলরেখাকে K-বিন্দুতে ছেদ করিল। FK যুক্ত কর।

FDK ও GDK ত্রিভুজ দুইটির DF = DG, DK সাধারণ এবং অন্তর্ভূত ∠FDK = অন্তর্ভূত ∠GDK, ∴ FK = GK.



এখন, EK + FK > EF, ∴ EK + KG অর্থাৎ EG > EF ∴ BC > EF.

2. দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে যদি একটির দুই বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই বাহুর সমান হয়, কিন্তু একটির ভূমি যদি অপরটির ভূমিঅপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে বৃহত্তর ভূমির বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর ভূমির বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।



ABC, DEF ত্রিভুজ দুইটির AB = DE, AC = CF, কিন্তু BC > EF.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠BAC > ∠EDF.

প্রমাণ। যদি ∠BAC, ∠EDF অপেক্ষা বৃহত্তর না হয়, তাহা হইলে ∠BAC, ∠EDF-এর সমান অথবা তদপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

যদি ∠BAC, ∠EDF-এর সমান হয় তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে। সুতরাং BC, EF-এর সমান হইবে। কিন্তু ইহা কল্পনাবিরুদ্ধ।

আবার যদি ∠BAC, ∠EDF অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তাহা হইলে BC, EF অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে। কিন্তু ইহাও কল্পনাবিরুদ্ধ।

∴ ∠BAC, ∠EDF-এর সমান বা তদপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না।

∴ ∠BAC, ∠EDF অপেক্ষা বৃহত্তর।

দ্বাদশ অধ্যায়

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা

রেখা, কোণ, ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ

1. পূর্বেই বলা হইয়াছে যে সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা অঙ্কন-মূলক। কিন্তু অঙ্কন-মূলক হইলেও সম্পাদ্য বিষয়টি শুদ্ধ হইল কিনা তাহা পরীক্ষা করিয়া দেখা প্রয়োজন। সুতরাং অঙ্কনের বিশুদ্ধতা পরীক্ষার জন্য প্রমাণের আবশ্যক। উপপাদ্য প্রতিজ্ঞায় যুক্তিদ্বারা সমর্থিত হইলেই প্রস্তাবিত বিষয়টি স্বীকার করিয়া লওয়া হয়, কিন্তু সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞায় অঙ্কনই মুখ্য অংশ বলিয়া কেবল যুক্তির উপর নির্ভর না করিয়া প্রকৃত মাপদ্বারাও অঙ্কনের বিশুদ্ধতা পরীক্ষা করা আবশ্যক।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞার প্রধানতঃ দুইটি অংশ—ইহার প্রথম অংশে অঙ্কন-প্রণালী বর্ণিত হয় এবং দ্বিতীয় অংশে থাকে প্রমাণ।

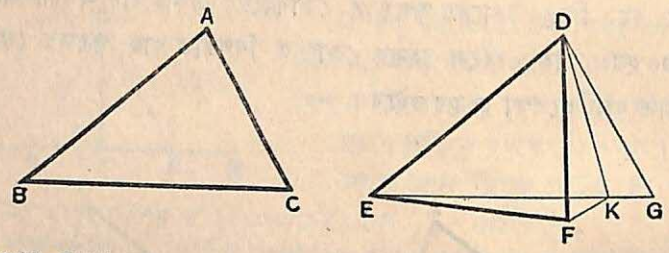
প্রমাণের সুবিধার জন্য মূল অঙ্কন ব্যতীত অন্যান্য রেখাদির অঙ্কনের প্রয়োজন হইতে পারে। মূল অঙ্কন হইতে পৃথক্ করিবার জন্য সেই রেখাগুলিকে সাধারণতঃ বিন্দুশ্রেণী (Dotted line) দ্বারা নির্দেশ করা হইয়াছে।

অঙ্কনক্রিয়ার জন্য একটি যন্ত্রবাক্সের প্রয়োজন। ইহাতে সাধারণতঃ নিম্নলিখিত যন্ত্রগুলি থাকে :—

1. একখানি মাপনী বা রুলার (Scale or Flat Ruler)।
2. দুইখানি ত্রিকোণী বা সেট্‌স্কোয়ার (Set Squares)।
3. একটি কাঁটা কম্পাস (Dividers)।
4. একটি পেন্সিল কম্পাস (A Pair of Pencil Compasses)।
5. একখানি চাঁদা বা কোণচক্র (Semi-circular Protractor)।

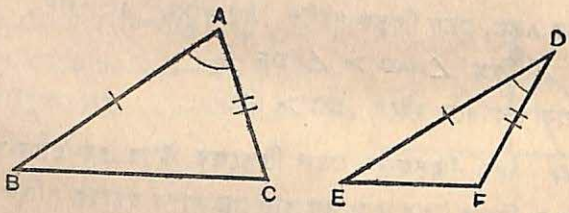
এতদ্ব্যতীত একখানি রবার, দুইটি পেন্সিল ও একখানি ছুরি রাখাও প্রয়োজন।

FDK ও GDK ত্রিভুজ দুইটির DF = DG, DK সাধারণ এবং অন্তর্ভূত $\angle FDK$ = অন্তর্ভূত $\angle GDK$, $\therefore$ FK = GK.



এখন, EK + FK > EF, $\therefore$ EK + KG অর্থাৎ EG > EF $\therefore$ BC > EF.

2. দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে যদি একটির দুই বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই বাহুর সমান হয়, কিন্তু একটির ভূমি যদি অপরটির ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে বৃহত্তর ভূমির বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর ভূমির বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।



ABC, DEF ত্রিভুজ দুইটির AB = DE, AC = CF, কিন্তু BC > EF.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle BAC > \angle EDF$.

প্রমাণ। যদি $\angle BAC$, $\angle EDF$ অপেক্ষা বৃহত্তর না হয়, তাহা হইলে $\angle BAC$, $\angle EDF$-এর সমান অথবা তদপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

যদি $\angle BAC$, $\angle EDF$-এর সমান হয় তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে। সুতরাং BC, EF-এর সমান হইবে। কিন্তু ইহা কল্পনাবিরুদ্ধ।

আবার যদি $\angle BAC$, $\angle EDF$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তাহা হইলে BC, EF অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে। কিন্তু ইহাও কল্পনাবিরুদ্ধ।

$\therefore$ $\angle BAC$, $\angle EDF$-এর সমান বা তদপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না।

$\therefore$ $\angle BAC$, $\angle EDF$ অপেক্ষা বৃহত্তর।

দ্বাদশ অধ্যায়

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা

রেখা, কোণ, ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ

1. পূর্বেই বলা হইয়াছে যে সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা অঙ্কন-মূলক। কিন্তু অঙ্কন-মূলক হইলেও সম্পাদ্য বিষয়টি শুদ্ধ হইল কিনা তাহা পরীক্ষা করিয়া দেখা প্রয়োজন। সুতরাং অঙ্কনের বিশুদ্ধতা পরীক্ষার জন্য প্রমাণের আবশ্যক। উপপাদ্য প্রতিজ্ঞায় যুক্তিদ্বারা সমর্থিত হইলেই প্রস্তাবিত বিষয়টি স্বীকার করিয়া লওয়া হয়, কিন্তু সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞায় অঙ্কনই মুখ্য অংশ বলিয়া কেবল যুক্তির উপর নির্ভর না করিয়া প্রকৃত মাপদ্বারাও অঙ্কনের বিশুদ্ধতা পরীক্ষা করা আবশ্যক।

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞার প্রধানতঃ দুইটি অংশ—ইহার প্রথম অংশে অঙ্কন-প্রণালী বর্ণিত হয় এবং দ্বিতীয় অংশে থাকে প্রমাণ।

প্রমাণের সুবিধার জন্য মূল অঙ্কন ব্যতীত অন্যান্য রেখাদির অঙ্কনের প্রয়োজন হইতে পারে। মূল অঙ্কন হইতে পৃথক্ করিবার জন্য সেই রেখাগুলিকে সাধারণতঃ বিন্দুশ্রেণী (Dotted line) দ্বারা নির্দেশ করা হইয়াছে।

অঙ্কনক্রিয়ার জন্য একটি যন্ত্রবাক্সের প্রয়োজন। ইহাতে সাধারণতঃ নিম্নলিখিত যন্ত্রগুলি থাকে :—

1. একখানি মাপনী বা রুলার (Scale or Flat Ruler)।
2. দুইখানি ত্রিকোণী বা সেট্‌স্কোয়ার (Set Squares)।
3. একটি কাঁটা কম্পাস (Dividers)।
4. একটি পেন্সিল কম্পাস (A Pair of Pencil Compasses)।
5. একখানি চাঁদা বা কোণচক্র (Semi-circular Protractor)।

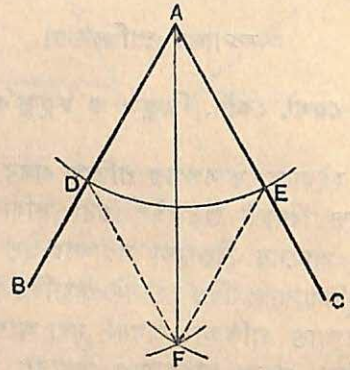
এতদ্ব্যতীত একখানি রবার, দুইটি পেন্সিল ও একখানি ছুরি রাখাও প্রয়োজন।

রেখা ও কোণ

সম্পাদ্য 1

একটি নির্দিষ্ট কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

(To bisect a given angle.)



BAC একটি নির্দিষ্ট কোণ।

ইহাকে সমান দুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন। A-কে কেন্দ্র করিয়া এবং যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যেন ইহা AB ও AC-কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে।

D ও E-কে কেন্দ্র করিয়া এবং DE ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর।

মনে কর এই চাপ দুইটি পরস্পর F-বিন্দুতে ছেদ করিল। AF সংযুক্ত কর।

এক্ষণে, AF হইল BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

প্রমাণ। DF, EF সংযুক্ত কর।

ADF এবং AEF ত্রিভুজ দুইটিতে

AD = AE (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

DF = EF (সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

AF সাধারণ বাহু।

$\therefore \triangle ADF \equiv \triangle AEF$

অতএব $\angle DAF = \angle EAF$

অর্থাৎ $\angle BAC$, AF দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

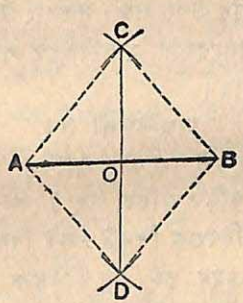
দ্রষ্টব্য। DE-কেই ব্যাসার্ধ লইতে হইবে এমন কোন নিয়ম নাই। এমন ব্যাসার্ধ লইতে হইবে যাহাতে চাপ দুইটি পরস্পর ছেদ করে। DE-র অর্ধেকের বেশী ব্যাসার্ধ লইয়া চাপ অঙ্কিত করিলে উহারা পরস্পর ছেদ করিবে।

মন্তব্য। প্রমাণদ্বারা কেবল অঙ্কন প্রণালীর যৌক্তিকতা বা বিশুদ্ধতাই প্রতিপন্ন হয়। প্রকৃত অঙ্কনের বিশুদ্ধতা নির্ণয়ের জন্য যথোপযুক্ত যন্ত্রের সাহায্যে পরিমাপ করা আবশ্যক। উল্লিখিত স্থলে চাঁদা দ্বারা মাপিয়া দেখ, BAF, CAF কোণদ্বয় সমান কিনা।

সম্পাদ্য 2

একটি নির্দিষ্ট সীমাবদ্ধ সরলরেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[To bisect a given finite straight line,]



AB একটি নির্দিষ্ট সীমাবদ্ধ সরলরেখা।

ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। A-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং AB-র অর্ধ অপেক্ষা বড় যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া AB সরলরেখার উভয়পার্শ্বে দুইটি চাপ অঙ্কিত কর।

আবার B-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং পূর্ব ব্যাসার্ধ লইয়া AB সরলরেখার উভয় পার্শ্বে এমন দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহারা পূর্ব অঙ্কিত চাপ দুইটিকে যথাক্রমে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে।

CD যুক্ত কর ; ইহা যেন AB-কে O-বিন্দুতে ছেদ করিল।

এক্ষণে, AB সরলরেখা O-বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইল।

প্রমাণ। AC, AD, BC, BD যুক্ত কর।

ACD এবং BCD ত্রিভুজে,

$$\left.\begin{matrix} AC = BC \\ AD = BD \end{matrix}\right\}$$ সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া

CD উভয়ের সাধারণ বাহু।

$\triangle ACD \equiv \triangle BCD$; অতএব $\angle ACD = \angle BCD$ অর্থাৎ $\angle ACO = \angle BCO$

আবার ACO এবং BCO ত্রিভুজে,

AC = BC, CO সাধারণ, এবং $\angle ACO = \angle BCO$

অতএব $\triangle ACO \equiv \triangle BCO$, $\therefore OA = OB$.

অর্থাৎ AB সরলরেখা O-বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য। AOC, BOC ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হওয়ার ফলে $\angle AOC = \angle BOC$। এই দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ বলিয়া প্রত্যেকটিই সমকোণ, অর্থাৎ CO সরলরেখা AB সরলরেখার উপর লম্ব। সুতরাং উক্ত সম্পাদ্যের অঙ্কন-প্রণালী অবলম্বনে কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার মধ্যবিন্দুতে লম্ব (বা নির্দিষ্ট সরলরেখার লম্বদ্বিখণ্ডক) অঙ্কন করা যায়।

অনুশীলনী 34

1. চাঁদার সাহায্যে একটি সমকোণ আঁকিয়া উহাকে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

2. যে কোন ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া উহার কোণত্রয়কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া দেখাও যে কোণত্রয়ের সমদ্বিখণ্ডক তিনটি একই বিন্দুতে মিলিত হয়।

3. একটি কোণকে এমন দুই ভাগে বিভক্ত কর যেন এক ভাগ অপর ভাগের তিনগুণ হয়।

4. একটি সূক্ষ্মকোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক অঙ্কিত কর; চাঁদা দ্বারা দ্বিখণ্ডকদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

5. একটি 10 সে. মি. সরলরেখাকে 4 ও 8 সমান ভাগে বিভক্ত কর।

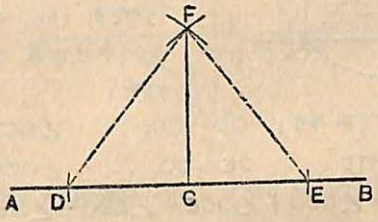
6. একটি সরলরেখাকে এমন দুই ভাগে বিভক্ত কর যেন এক ভাগ অপর ভাগের তিন গুণ হয়।

7. একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর তিনটি লম্বদ্বিখণ্ডক অঙ্কিত কর। উহারা এক বিন্দুতে মিলিত হয় কিনা দেখ।

8. একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু হইতে তিনটি মধ্যমা অঙ্কিত কর। মধ্যমাতিনটি এক বিন্দুতে মিলিত হয় কিনা দেখ।

সম্পাদ্য 3

কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপরিস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার উপর একটি লম্ব টানিতে হইবে। [To draw a straight line perpendicular to a given staight line from a given point in it.]



AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং C উহার উপরিস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। C-বিন্দুতে AB-র উপর একটি লম্ব টানিতে হইবে।

অঙ্কন। C-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া এমন দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যাহারা AB-কে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে।

D ও E বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং প্রত্যেক ক্ষেত্রে DE-র অর্ধ অপেক্ষা বড় যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া AB সরলরেখার একই পার্শ্বে এমন দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যাহারা F-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে।

CF যুক্ত কর। তাহা হইলে CF, AB-র উপর লম্ব হইল।

প্রমাণ। DF, EF যুক্ত কর। DCF, ECF ত্রিভুজে,

DC = EC, DF = EF, CF সাধারণ বাহু;

অতএব $\triangle DCF \equiv \triangle ECF$,

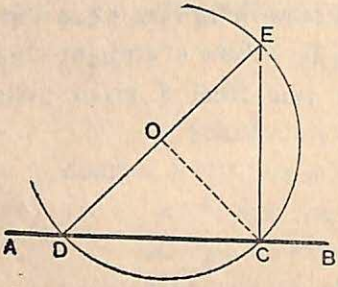
$\therefore \angle DCF = \angle ECF$

এবং এই দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ বলিয়া প্রত্যেকেই সমকোণ।

অর্থাৎ CF, AB-র উপর C-বিন্দুতে লম্ব।

দ্রষ্টব্য। C-বিন্দুটি AB সরলরেখার এক প্রান্তে অবস্থিত হইলে AB সরলরেখাকে C-র দিকে বর্ধিত করিয়া লইবে।

দ্বিতীয় প্রণালী। AB সরলরেখার বহির্দেশে যেকোন বিন্দু O লও। O কে কেন্দ্র করিয়া এবং OC-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। মনে কর এই বৃত্ত AB-কে D-বিন্দুতে ছেদ করিল। DO যুক্ত কর এবং DO সরলরেখাকে বর্ধিত করিয়া বৃত্তের পরিধির সহিত E বিন্দুতে ছেদ করাও। CE যুক্ত কর। এক্ষণে, CE, AB-র উপর লম্ব হইল।

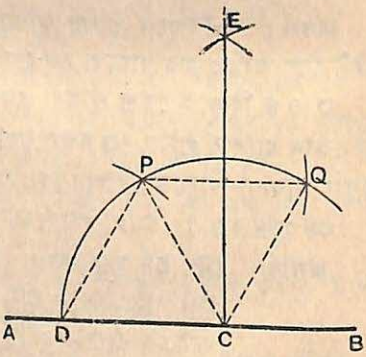


প্রমাণ। OC যুক্ত কর। OD = OC, ∴ $\angle OCD = \angle ODC$

আবার OE = OC, ∴ $\angle OCE = \angle OEC$

∴ $\angle DCE = \angle OCD + \angle OCE = \angle EDC + \angle DEC$ = দুই সমকোণের অর্ধেক সমকোণ। ∴ CE, AB-র উপর C-বিন্দুতে লম্ব।

তৃতীয় প্রণালী। C-কে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যেন ইহা AB-কে D-বিন্দুতে ছেদ করে। D-কে কেন্দ্র করিয়া পূর্ব ব্যাসার্ধ লইয়া ঐ চাপকে P-বিন্দুতে, এবং P-কে কেন্দ্র করিয়া পূর্ব ব্যাসার্ধ লইয়া ঐ চাপকে পুনরায় Q-বিন্দুতে ছেদ কর। P ও Q-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া পূর্বোক্ত ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহারা পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করে। CE যুক্ত কর।



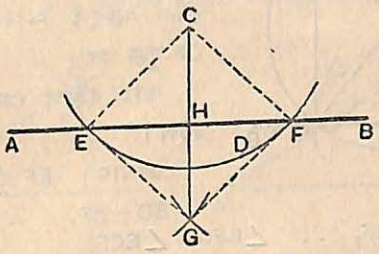
তাহা হইলে CE, AB-র উপর C-বিন্দুতে লম্ব হইল।

প্রমাণ। PD, PC, PQ, CQ যুক্ত কর। $\angle DCP = \angle PCQ = 60°$ (সমবাহু ত্রিভুজের কোণ বলিয়া)। CE, $\angle PCQ$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক। সুতরাং $\angle PCE = 30°$

∴ $\angle DCE = 60° + 30° = 90°$। অর্থাৎ CE, AB-র উপর C-বিন্দুতে লম্ব।

সম্পাদ্য 4

একটি সরলরেখার বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার উপর একটি লম্ব টানিতে হইবে। [To draw a straight line perpendicular to a given straight line from a given point outside it.]



AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং C উহার বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

C হইতে AB-র উপর একটি লম্ব টানিতে হইবে।

অঙ্কন। AB-র যে পার্শ্বে C আছে তাহার বিপরীত পার্শ্বে D একটি বিন্দু লও। C-কে কেন্দ্র করিয়া এবং CD-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর। ঐ চাপ যেন AB-কে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন E ও F-কে কেন্দ্র করিয়া এবং প্রতি ক্ষেত্রে EF-এর অর্ধ অপেক্ষা বড় যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ AB-র যে দিকে C আছে উহার বিপরীত দিকে এমনভাবে অঙ্কিত কর যেন উহারা G-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে।

CG যুক্ত কর। CG সরলরেখা যেন AB-কে H-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

তাহা হইলে CH, AB-র উপর লম্ব হইল।

প্রমাণ। CE, CF, GE, GF যুক্ত কর।

CEG এবং CFG ত্রিভুজে, CE = CF, GE = GF, CG সাধারণ।

অতএব $\triangle CEG \equiv \triangle CFG$. $\therefore$ $\angle ECG = \angle FCG$.

অর্থাৎ $\angle ECH = \angle FCH$

আবার, CEH এবং CFH ত্রিভুজে,

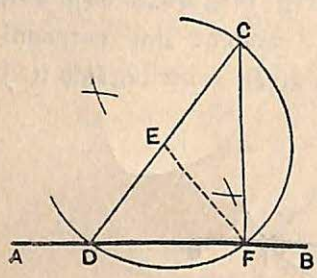
CE = CF, CH সাধারণ বাহু এবং $\angle ECH = \angle FCH$.

$\therefore$ $\triangle CEH \equiv \triangle CFH$. $\therefore$ $\angle CHE = \angle CHF$.

এই দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ বলিয়া প্রত্যেকেই সমকোণ।

অতএব CH, AB-র উপর লম্ব।

দ্বিতীয় প্রণালী। AB সরলরেখার উপর D একটি বিন্দু লও। DC যুক্ত কর এবং উহাকে E-বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। E-কে কেন্দ্র করিয়া এবং EC-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর। এই চাপ যেন AB-কে F-বিন্দুতে ছেদ করিল। CF যুক্ত কর।



তাহা হইলে CF, AB-র উপর লম্ব হইল।

প্রমাণ। EF যুক্ত কর।

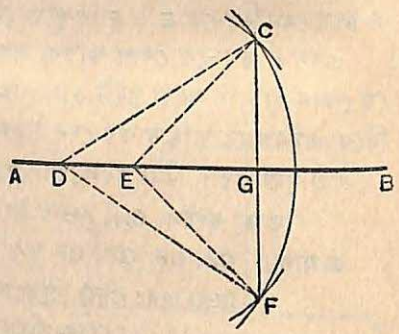
ED = EF, ∴ ∠EFD = ∠EDF

আবার EC = EF, ∴ ∠EFC = ∠ECF.

∴ ∠DFC = ∠EFD + ∠EFC = ∠CDF + ∠DCF = দুই সমকোণের অর্ধ = এক সমকোণ। অতএব, CF, AB-র উপর লম্ব।

তৃতীয় প্রণালী। AB-র উপর D ও E যে কোন দুইটি বিন্দু লও। D-কে কেন্দ্র করিয়া ও DC-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর। আবার E-কে কেন্দ্র করিয়া EC-ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহা পূর্ব অঙ্কিত চাপকে F-বিন্দুতে ছেদ করে।

CF যুক্ত কর। CF যেন AB-কে G-বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে CG, AB-র উপর লম্ব হইল।



প্রমাণ। △DEC ≡ △DEF,

যেহেতু DC = DF, EC = EF, DE সাধারণ।

∴ ∠CDE = ∠FDE অর্থাৎ ∠CDG = ∠FDG

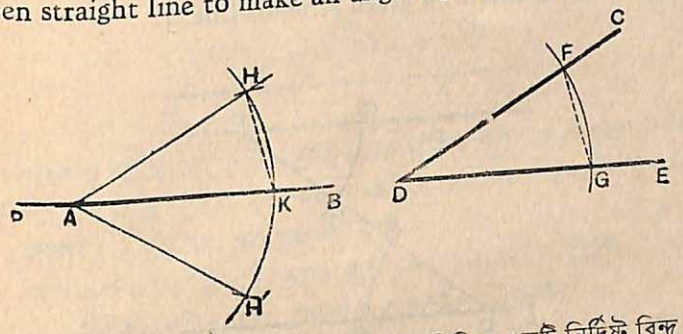
আবার, △CDG ≡ △FDG,

যেহেতু DC = DF, DG সাধারণ এবং ∠CDG = ∠FDG

∴ ∠CGD = ∠FGD = এক সমকোণ (সন্নিহিত কোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণ বলিয়া)। অতএব CG, AB-র উপর লম্ব।

সম্পাদ্য 5

একটি সরলরেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান একটি কোণ অঙ্কন করিতে হইবে। [At a given point in a given straight line to make an angle equal to a given angle]



PB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা, A উহার উপরিস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং CDE একটি নির্দিষ্ট কোণ।

PB সরলরেখার A-বিন্দুতে CDE কোণের সমান একটি কোণ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। D-কে কেন্দ্র করিয়া এবং যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহা DC-কে F-বিন্দুতে এবং DE-কে G-বিন্দুতে ছেদ করে।

A-কে কেন্দ্র করিয়া DG-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহা AB-কে K-বিন্দুতে ছেদ করে।

K-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া FG ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহা পূর্ব চাপটিকে H-বিন্দুতে ছেদ করে। AH যুক্ত কর।

তাহা হইলে, HAK অভীষ্ট কোণ হইল।

প্রমাণ। FG ও HK যুক্ত কর।

AKH এবং DGF ত্রিভুজে

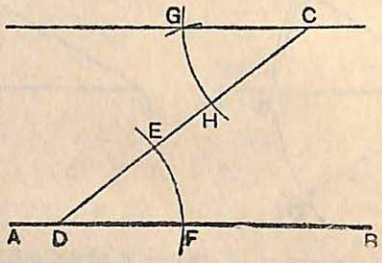
AK = DG, AH = DF এবং HK = FG

$\therefore \triangle AKH \equiv \triangle DGF$, অতএব $\angle HAK = \angle FDG = \angle CDE$.

দ্রষ্টব্য। AB সরলরেখার যে কোন পার্শ্বেই অভীষ্ট কোণটি অঙ্কিত করা যায়। H'AK কোণও অভীষ্ট কোণ হইতে পারে।

সম্পাদ্য 6

কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল একটি সরলরেখা টানিতে হইবে। [Through a given point to draw a straight line parallel to a given straight line.]



AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং C উহার বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। C বিন্দু দিয়া AB-র সমান্তরাল একটি সরলরেখা টানিতে হইবে।

অঙ্কন। AB-র উপর যে কোন এক বিন্দু D লও এবং CD যুক্ত কর।

CD সরলরেখার C-বিন্দুতে CDB কোণের সমান এবং উহার একান্তর DCG কোণ অঙ্কিত কর।

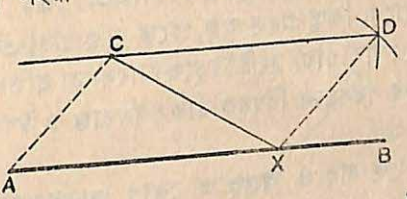
তাহা হইলে CG সরলরেখা AB-র সমান্তরাল হইল।

প্রমাণ। CD সরলরেখা AB ও CG-সরলরেখার সহিত মিলিত হইয়া CDB এবং DCG দুইটি পরস্পর সমান একান্তর কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

∴ AB ও CG সমান্তরাল।

দ্রষ্টব্য। অনুরূপ কোণের সাহায্যেও সমান্তরাল সরলরেখা টানা যাইতে পারে।

দ্বিতীয় প্রণালী। AB সরলরেখার উপর X একটি বিন্দু লও। C-কে কেন্দ্র করিয়া AX-ব্যাসার্ধ লইয়া এবং X-কে কেন্দ্র করিয়া AC ব্যাসার্ধ লইয়া AB-র



যে পার্শ্বে C আছে সেই পার্শ্বে দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহারা D-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে। CD যুক্ত কর। এক্ষণে CD, AB-র সমান্তরাল হইল।

প্রমাণ। AC, CX, XD যুক্ত কর।

ACX এবং CXD ত্রিভুজে, AC = XD, AX = CD, CX সাধারণ,

ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম, অতএব $\angle AXC = \angle XCD$.

ইহারা একান্তর কোণ বলিয়া AB ও CD সমান্তরাল।

ত্রিভুজ

2. ত্রিভুজ অঙ্কনের ন্যূনতম প্রয়োজনীয় উপাত্ত।

প্রত্যেক ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ—তিনটি বাহু, তিনটি কোণ। ইহাদের কতিপয় অঙ্গের পরিমাণ নির্দেশ করিয়া একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে বলা হয়। এখন অঙ্গের কথা বলিলে অঙ্গীর কথা স্বতঃই জামাদের মনে উদিত হয়, অর্থাৎ ঐ সমস্ত অঙ্গবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের ছবি আমাদের কল্পনায় ভাসিয়া উঠে। ত্রিভুজের যে ছবিটি আমাদের কল্পনায় দেখা দেয়, আমাদের করণীয় ত্রিভুজটি হইবে সেই ছবিরই একটি প্রতিচ্ছবি। জ্যামিতির ভাষায় বলিতে গেলে করণীয় ত্রিভুজটি কল্পিত ত্রিভুজের সহিত সর্বতোভাবে সমান হওয়া আবশ্যক।

এখন দেখিতে হইবে দুইটি ত্রিভুজের কোন্ কোন্ অঙ্গের মধ্যে কিরূপ সম্বন্ধ থাকিলে উহারা সর্বতোভাবে সমান হয়। কোন কোন স্থলে প্রদত্ত অঙ্গ বা

উপাত্ত (Data) দ্বারা প্রত্যক্ষভাবে দুইটি ত্রিভুজের সর্বসমতা প্রতিপন্ন করা নাও যাইতে পারে, সুতরাং করণীয় ত্রিভুজটি আপাততঃ দুরূহ বা অসম্ভব বলিয়া অনুমিত হইতে পারে, কিন্তু প্রদত্ত অঙ্গ হইতে যুক্তি দ্বারা এমন সব অঙ্গ নির্ণয় করা যাইতে পারে যাহা দ্বারা দুইটি ত্রিভুজের সর্বসমতা প্রতিপন্ন করা সহজসাধ্য।

দুইটি ত্রিভুজের সর্বসমতা বিষয়ক স্বীকৃত-সিদ্ধান্ত ও উপপাদ্য হইতে আমরা দেখিয়াছি যে—

(1) একের দুই বাহু ও অন্তর্ভূত কোণ অপরের দুই বাহু ও অন্তর্ভূত কোণের সমান হইলে, অথবা (2) একের তিন বাহু অপরের তিন বাহুর সমান হইলে, অথবা (3) একের দুই কোণ ও এক বাহু অপরের দুই কোণ ও অনুরূপ বাহুর সমান হইলে দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হয়।

সুতরাং যদি উক্ত তিনটি অঙ্গ দেওয়া থাকে অথবা নির্দিষ্ট অঙ্গ হইতে উক্ত প্রকার তিনটি অঙ্গ নির্ণয় করা সম্ভব হয়, তাহা হইলে প্রদত্ত অঙ্গ দ্বারা অভীষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায়। এতদপেক্ষা কম অঙ্গ দেওয়া থাকিলে কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায় না।

তিনটি কোণ দেওয়া থাকিলে অসংখ্য ত্রিভুজ অঙ্কিত হইতে পারে যাহারা পরস্পর সদৃশকোণী হইলেও পরস্পর সমান না হইতে পারে।

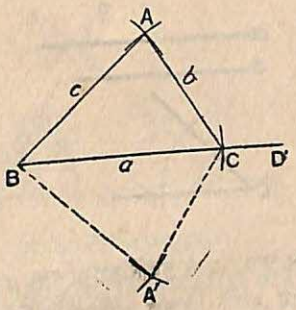
দুই বাহু ও উহাদের এক বাহুর বিপরীত কোণটি সূক্ষ্মকোণ হইলে দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কিত হইতে পারে। ইহা ত্রিভুজ অঙ্কনের দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র।

সংক্ষেপার্থে কেবল শীর্ষবিন্দুর পরিচায়ক অক্ষরটির দ্বারা সেই শীর্ষবিন্দুস্থ কোণটির নাম করা যাইতে পারে এবং ABC ত্রিভুজের $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$-এর বিপরীত বাহুকে যথাক্রমে, a, b ও c দ্বারা সূচিত করা যাইতে পারে।

———

সম্পাদ্য 7

তিন বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে ; উহাদের দ্বারা একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a triangle having given the lengths of the three sides.]



মনে কর a, b, c তিনটি নির্দিষ্ট সরলরেখা।

এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার তিন বাহু a, b, c-র সমান।

অঙ্কন। BD একটি সরলরেখা লও।

উহা হইতে a-রেখার সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও। C-কে কেন্দ্র করিয়া b-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর।

আবার B-কে কেন্দ্র করিয়া c-ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কিত কর।

মনে কর উক্ত চাপ দুইটি পরস্পর A-বিন্দুতে ছেদ করিল।

AB, AC যুক্ত কর।

তাহা হইলে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

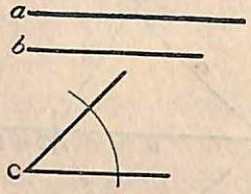
প্রমাণ। অঙ্কনানুযায়ী, ABC ত্রিভুজের BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$.

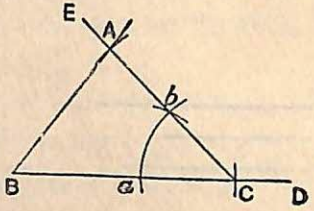
দ্রষ্টব্য। (1) B ও C-কে কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত চাপ দুইটি BC সরলরেখার উভয় পার্শ্বেই ছেদ করিতে পারে। A′BC ও অভীষ্ট ত্রিভুজ হইতে পারে।

(2) উপপাদ্য 15-এর সিদ্ধান্ত অনুসারে ত্রিভুজের দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। সুতরাং a, b, c-র যে কোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর না হইলে ত্রিভুজ অঙ্কন অসম্ভব হইবে।

সম্পাদ্য 8

দুই বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a triangle having given two sides and the included angle]





মনে কর. a, b দুইটি সরলরেখা এবং C একটি নির্দিষ্ট কোণ।

এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার দুই বাহু যথাক্রমে a ও b-র সমান এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণটি C-কোণের সমান।

অঙ্কন। BD একটি সরলরেখা লও।

উহা হইতে a-র সমান BC অংশ কাটিয়া লও।

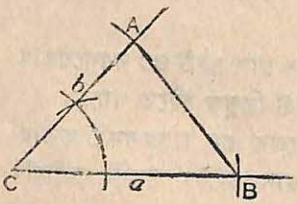
BC-সরলরেখার C-বিন্দুতে প্রদত্ত C-কোণের সমান করিয়া $\angle$BCE অঙ্কিত কর। CE হইতে b-র সমান করিয়া CA অংশ কাটিয়া লও।

AB যুক্ত কর।

এক্ষণে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

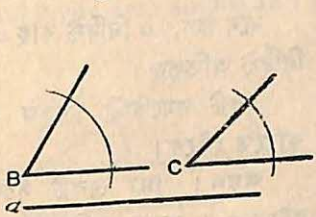
প্রমাণ। অঙ্কন অনুযায়ী, ABC ত্রিভুজে BC$=a$, CA$=b$, $\angle$ACB$=$ প্রদত্ত $\angle$C.

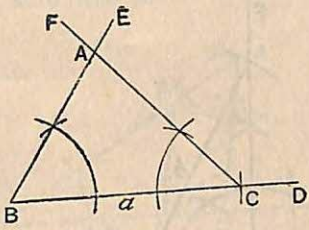
দ্বিতীয় প্রণালী। প্রদত্ত C-কোণের এক বাহু হইতে a-র সমান করিয়া CB অংশ, অপর বাহু হইতে b-র সমান করিয়া CA অংশ কাটিয়া লও। AB যুক্ত কর। তাহা হইলে ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইবে। (প্রয়োজন হইলে C-কোণের উভয় বাহুই বর্ধিত করা যাইতে পারে।)



সম্পাদ্য 9

দুইটি কোণ এবং উহাদের সন্নিহিত সাধারণ বাহু নির্দিষ্ট আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a triangle having given two angles and the side adjacent to them.]





মনে কর, B, C দুইটি কোণ এবং a একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা।

এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার একটি বাহু a-র সমান এবং তৎসন্নিহিত কোণদ্বয় যথাক্রমে $\angle$B এবং $\angle$C-র সমান।

অঙ্কন। BD একটি সরলরেখা লও।

উহা হইতে a-র সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও। B-বিন্দুতে প্রদত্ত B-কোণের সমান $\angle$CBE, এবং C-বিন্দুতে প্রদত্ত C-কোণের সমান $\angle$BCF অঙ্কিত কর।

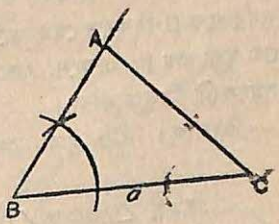
মনে কর, BE ও CF, A-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল।

তাহা হইলে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। অঙ্কন অনুসারে, ABC ত্রিভুজে $\angle$ABC = প্রদত্ত $\angle$B, $\angle$ACB = প্রদত্ত $\angle$C ; BC = a.

দ্বিতীয় প্রণালী। প্রদত্ত $\angle$C-র এক বাহু হইতে (প্রয়োজন হইলে বর্ধিত করিয়া) a-র সমান করিয়া CB লও।

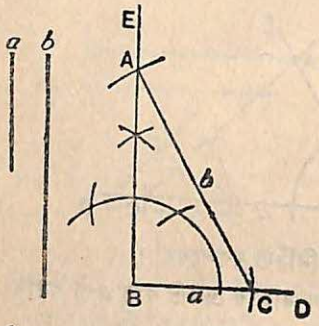
B-বিন্দুতে $\angle$B-র সমান $\angle$CBA অঙ্কিত কর। মনে কর BA, $\angle$C-র অপর বাহুকে A-বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।



দ্রষ্টব্য। $\angle$B এবং $\angle$C-র সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ন্যূন হওয়া আবশ্যক।

সম্পাদ্য 10

অতিভুজ এবং অপর এক বাহু নির্দিষ্ট আছে। সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a right-angled triangle having given the hypotenuse and one side.]



মনে কর, a নির্দিষ্ট বাহু এবং b নির্দিষ্ট অতিভুজ।

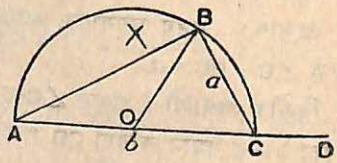
একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। BD একটি সরলরেখা হইতে a-র সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও। B হইতে BC-র উপর BE লম্ব টান। C-কে কেন্দ্র করিয়া b-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যাহা BE সরলরেখাকে A-বিন্দুতে ছেদ করে। AC যুক্ত কর।

তাহা হইলে, ABC অভীষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। অঙ্কন অনুসারে, $\angle B$ = সমকোণ, $BC = a$, অতিভুজ $AC = b$.

দ্বিতীয় প্রণালী। AD সরলরেখা হইতে b-র সমান করিয়া AC অংশ কাটিয়া লও। AC-কে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর এবং O-কে কেন্দ্র করিয়া OA-ব্যাসার্ধ লইয়া AC-র উপর একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর।



C-কে কেন্দ্র করিয়া a-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যাহা অর্ধবৃত্তকে B-বিন্দুতে ছেদ করে। AB, BC যুক্ত কর। এক্ষণে, ABC অভীষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ হইল।

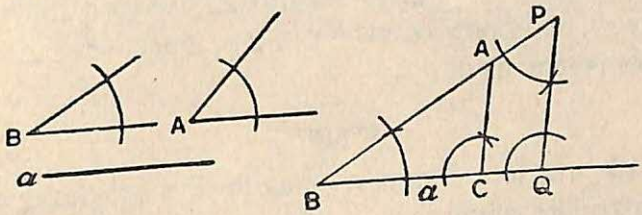
প্রমাণ। OB যুক্ত কর। $OA = OB$, $\therefore \angle OBA = \angle OAB$,

$OC = OB$, $\therefore \angle OBC = \angle OCB$

$\therefore$ সমগ্র $\angle ABC = \angle CAB + \angle ACB$ = এক সমকোণ, $BC = a$, অতিভুজ $AC = b$.

সম্পাদ্য 11

দুইটি কোণ এবং উহাদের একটি কোণের বিপরীত বাহু নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a triangle having given two angles and a side opposite to one of them.]



মনে কর B, A দুইটি নির্দিষ্ট কোণ এবং a একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা।

এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার দুইটি কোণ B, A কোণের সমান এবং উহাদের কোন কোণের (ধর, $\angle A$-এর) সম্মুখীন বাহু a-সরলরেখার সমান হয়।

অঙ্কন। BPQ একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার $\angle PBQ = \angle B$ এবং $\angle BPQ = \angle A$.

(1) যদি $BQ = a$ হয়, তাহা হইলে BPQ অভীষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

(2) অন্যথায়, BQ বা বর্ধিত BQ হইতে a-র সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও।

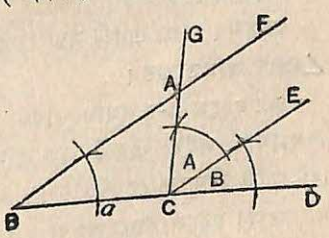
QP-র সমান্তরাল করিয়া CA টান এবং মনে কর CA, BP বা বর্ধিত BP-কে A-বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ। $\because$ $AC \parallel PQ$ $\therefore$ $\angle BAC = \angle P =$ প্রদত্ত $\angle A$.

এবং $\angle ABC =$ প্রদত্ত $\angle B$, $BC = a$. (অঙ্কন)

দ্বিতীয় প্রণালী। BD একটি সরলরেখা লও ; উহা হইতে a-এর সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও।

BD সরলরেখার একই দিকে B ও C-বিন্দুতে $\angle B$-এর সমান DBF, DCE দুইটি কোণ অঙ্কিত কর।



CE সরলরেখার C-বিন্দুতে CE-র সহিত A কোণের সমান ∠ECG অঙ্কিত কর। মনে কর, BF, CG পরস্পর A-বিন্দুতে ছেদ করিল।

তাহা হইলে, ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

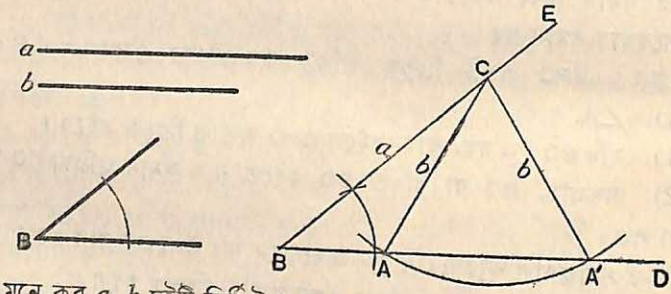
প্রমাণ। বহিঃ ∠DCE = বিপরীত অন্তঃ ∠DBF.

∴ BF ∥ CE. ∴ ∠BAC = একান্তর ∠ECA = প্রদত্ত ∠A.

অতএব, ABC ত্রিভুজে, ∠ABC = প্রদত্ত ∠B, ∠BAC = প্রদত্ত ∠A এবং ∠A-এর বিপরীত বাহু BC = a.

সম্পাদ্য 12

দুইটি বাহু এবং উহাদের এক বাহুর বিপরীত কোণ নির্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a triangle having given two sides and the angle opposite to one of them.]



মনে কর a, b দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং B একটি নির্দিষ্ট কোণ।

এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার একবাহু a-র সমান, একটি কোণ ∠B-এর সমান এবং ∠B-এর বিপরীত বাহু b-এর সমান।

অঙ্কন। BD একটি সরলরেখা লও এবং উহার B-বিন্দুতে ∠B-এর সমান ∠DBE অঙ্কিত কর।

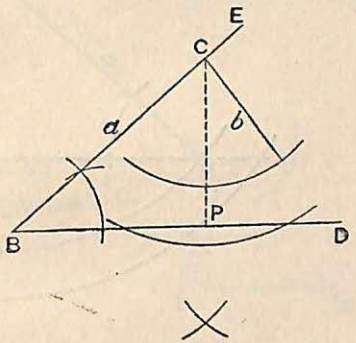
BE হইতে a-র সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও। C-কে কেন্দ্র করিয়া b-ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর। মনে কর, এই চাপ BD-কে A, A′ এই দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিল। CA, CA′ যুক্ত কর।

তাহা হইলে ABC অথবা A′BC দুইটিই অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

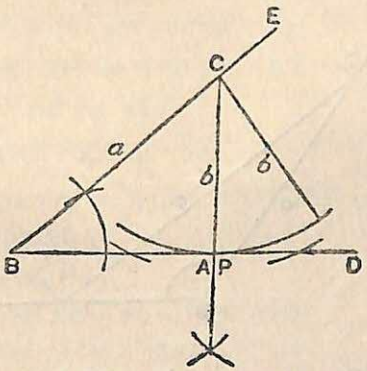
প্রমাণ। অঙ্কন অনুযায়ী উভয় ত্রিভুজে,
BC$=a$, CA (বা CA′)$=b$, $\angle$ABC (বা $\angle$A′BC) = প্রদত্ত $\angle$B.

মন্তব্য। ABC, A′BC ত্রিভুজ দুইটি অসমান হইলেও উভয় স্থলেই প্রদত্ত শর্ত পালিত হইয়াছে। ইহা ত্রিভুজ অঙ্কনের একটি দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র(Ambiguous case)। $\angle$B সমকোণ এবং a, b-র বৃহত্তরটি $\angle$B-এর সম্মুখীন বাহু হইলে একটি মাত্র ত্রিভুজ অঙ্কিত হইবে।

দ্রষ্টব্য। উক্ত সম্পাদ্যের উপাত্ত হইতে সর্বত্র দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কিত হইবে না। কোন স্থলে একটি মাত্র ত্রিভুজ হইবে, আবার কোন স্থলে একটি ত্রিভুজও না হইতে পারে, যথা—



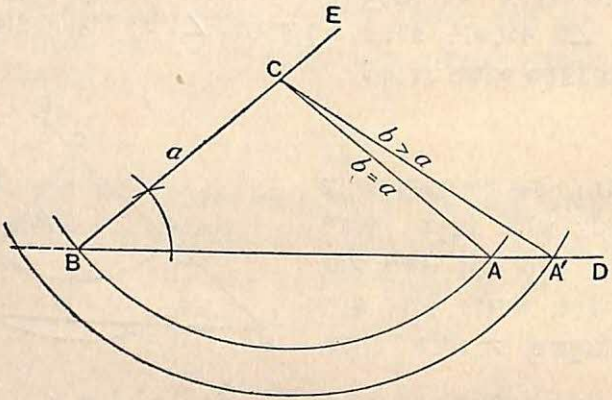
(1) C হইতে BD-র উপর লম্ব CP অপেক্ষা b ক্ষুদ্রতর হইলে ত্রিভুজ অঙ্কন অসম্ভব। (b < CP) (উপরের চিত্র দেখ।)



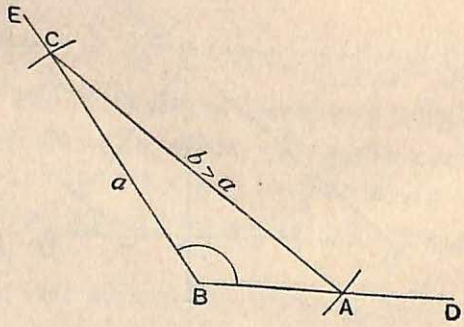
(2) C হইতে BD-র উপর CP লম্বের সমান b হইলে একটিমাত্র ত্রিভুজ সম্ভব। (b=CP)। (উপরের চিত্র দেখ।)

(3) a, b সমান হইলে একটি মাত্র ত্রিভুজ সম্ভব, যদি $\angle B$ সূক্ষ্মকোণ হয়। ($a=b$) (নীচের চিত্র দেখ।)

$b > a$ হইলেও একটি মাত্র ত্রিভুজ সম্ভব।



(4) $\angle B$ স্থূলকোণ হইলে, যদি $b > a$ হয়, তবে একটি মাত্র ত্রিভুজ সম্ভব, কিন্তু যদি $a=b$ অথবা $a>b$ হয়, তবে ত্রিভুজ অসম্ভব। (নীচের চিত্র দেখ)।



(5) $b < a$ কিন্তু $>$ লম্ব CP হইলে দুইটি ত্রিভুজ সম্ভব (দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র)। (মূল সম্পাদ্যের চিত্র দেখ।)

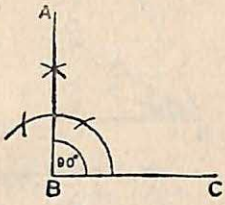
3. **জ্যামিতিক প্রণালীতে বিবিধ কোণ অঙ্কন।**

[90°, 45°, 60°, 30°, 15°, 135°, 120°, 150°, 165°]

(1) 90° কোণ (বা সমকোণ) অঙ্কন।

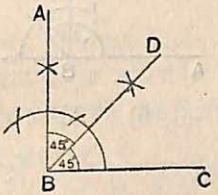
BC একটি সরলরেখা লইয়া উহার উপর B-বিন্দুতে BA লম্ব অঙ্কিত কর।

তাহা হইলে $\angle ABC = 90°$.



(2) **45° কোণ অঙ্কন।**

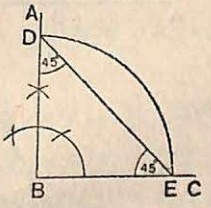
একটি 90° কোণ ABC অঙ্কিত করিয়া উহাকে BD দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর। তাহা হইলে $\angle ABD = \angle DBC = 45°$.



দ্বিতীয় প্রণালী। একটি 90° কোণ ABC অঙ্কিত কর।

B-কে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত কর যাহা AB ও BC-কে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। DE যুক্ত কর।

তাহা হইলে $\angle BDE = \angle BED = 45°$.



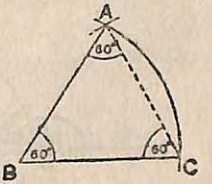
দ্রষ্টব্য। 45° কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে $22\frac{1}{2}°$ কোণ পাওয়া যাইবে।

(3) **60° কোণ অঙ্কন।**

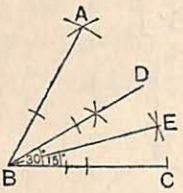
BC একটি সরলরেখা লও।

B ও C-কে কেন্দ্র করিয়া এবং BC-ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যাহারা A-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে। AB ও AC যুক্ত কর।

তাহা হইলে $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.



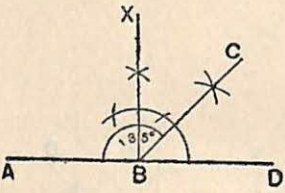
(4) 30° ও 15° কোণ অঙ্কন।



60° কোণকে সম-দ্বিখণ্ডিত করিলে 30° এবং 30° কোণকে সম-দ্বিখণ্ডিত করিলে 15° কোণ পাওয়া যাইবে।
$\angle ABD = \angle DBC = 30^\circ$; $\angle DBE = \angle EBC = 15^\circ$.

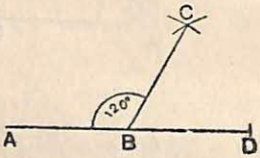
দ্রষ্টব্য। 15° কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে $7\frac{1}{2}^\circ$ কোণ পাওয়া যাইবে।

(5) 135° কোণ অঙ্কন। $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$ অথবা $90^\circ + 45^\circ$.



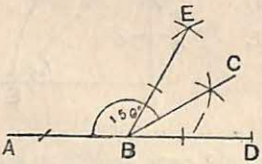
AD সরলরেখার অন্তর্গত যে কোন বিন্দু B হইতে BX লম্ব অঙ্কিত কর। $\angle XBD$-কে BC সরলরেখাদ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর। তাহা হইলে $\angle ABC$ = সরল $\angle ABD - \angle CBD$, অথবা $\angle ABX + \angle XBC$
$= 180^\circ - 45^\circ$, অথবা $90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$

(6) 120° কোণ অঙ্কন। $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$.



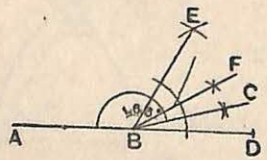
পূর্ববৎ $\angle CBD = 60^\circ$ অঙ্কিত কর।
DB-কে যে কোন বিন্দু A পর্যন্ত বর্ধিত কর।
তাহা হইলে, $\angle ABC$ = সরল $\angle ABD - \angle CBD$
$= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

(7) 150° কোণ অঙ্কন। $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$.



পূর্ববৎ $\angle EBD = 60^\circ$ অঙ্কিত কর।
$\angle EBD$-কে BC দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর।
তাহা হইলে $\angle ABC$ = সরল $\angle ABD - \angle CBD = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

(8) 165° কোণ অঙ্কন। $165^\circ = 180^\circ - 15^\circ$.



পূর্ববৎ $\angle EBD = 60^\circ$ অঙ্কিত কর।
$\angle EBD$-কে BF দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর এবং $\angle FBD$-কে BC দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর।
তাহা হইলে, $\angle ABC$ = সরল $\angle ABD - \angle CBD$
$= 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$.

দ্রষ্টব্য। উক্ত অঙ্কন প্রণালীর সাহায্যে নিম্নলিখিত কোণগুলি অঙ্কন করা যায় :

(1) $37\frac{1}{2}^\circ = (30^\circ + 7\frac{1}{2})^\circ$ (2) $52\frac{1}{2}^\circ = (30^\circ + 22\frac{1}{2}^\circ)$
(3) $67\frac{1}{2}^\circ = (60^\circ + 7\frac{1}{2}^\circ)$ (4) $82\frac{1}{2}^\circ = (60^\circ + 22\frac{1}{2}^\circ)$
(5) $105^\circ = (90^\circ + 15^\circ)$ (6) $97\frac{1}{2}^\circ = (90^\circ + 7\frac{1}{2}^\circ)$
(7) $112\frac{1}{2}^\circ = (90^\circ + 22\frac{1}{2}^\circ)$ (8) $127\frac{1}{2}^\circ = (120^\circ + 7\frac{1}{2}^\circ)$
(9) $142\frac{1}{2}^\circ = (120^\circ + 22\frac{1}{2}^\circ)$ (10) $157\frac{1}{2}^\circ = (150^\circ + 7\frac{1}{2})$
(11) $172\frac{1}{2}^\circ = (150^\circ + 22\frac{1}{2}^\circ)$ (12) $187\frac{1}{2}^\circ = (165^\circ + 22\frac{1}{2}^\circ)$

অনুশীলনী 35

1. নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট বাহুগুলির উপর সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর : 38 মি. মি., 4 সে. মি., 4·6 সে. মি, 5·8 সে. মি., 7·1 সে. মি., 65 মি. মি.

2. নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট বাহু লইয়া ত্রিভুজ অঙ্কিত কর :—
(1) 4 সে. মি.,6 সে. মি., 8 সে. মি. (2) 4 সে. মি., 3 সে. মি., 5 সে.মি.
(3) 4·6 সে. মি., 8·2 সে. মি., 10·4 সে. মি.
(4) 4 সে. মি., 3·8 সে. মি., 5·7 সে. মি.

3. ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর, যাহার দুই বাহু ও অন্তর্ভুক্ত কোণের পরিমাণ :—
(1) 4 সে. মি., 6 সে. মি., 45°. (2) 4·6 সে. মি., 6·2 সে. মি., 90°.
(3) 5 সে. মি., 7 সে. মি., 135°. (4) 4·8 সে. মি., 6·3 সে. মি., 60°.

4. ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর, যাহার দুই কোণ ও সন্নিহিত বাহুর পরিমাণ :—
(1) 90°, 45°, 4 সে. মি. (2) 60°, 30°, 4·4 সে. মি.
(3) 15°, $22\frac{1}{2}^\circ$, 7 সে. মি.

5. ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর, যাহার দুই কোণ ও প্রথমোক্ত কোণের বিপরীত বাহুর পরিমাণ :—
(1) 30°, 45°, 6 সে. মি. (2) 45°, 60°, 6·4 সে. মি.
(3) 60°, 30°, 10 সে. মি.

6. ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর, যাহার দুই বাহু এবং প্রথম বাহুর বিপরীত কোণের পরিমাণ :—

(1) 6 সে. মি., 8 সে. মি., 30°. (2) 4·2 সে. মি.. 6·6 সে. মি., 60° (3) 5 সে. মি., 7 সে. মি., 45°.

7. সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর, যাহার অতিভুজ এবং অপর এক বাহুর পরিমাণ :—

(1) 10 সে. মি., 6 সে. মি. (2) 7·2 সে. মি., 4·3 সে. মি.

(3) 9·4 সে. মি., 5·8 সে. মি.

8. ত্রিভুজের সাহায্যে 45°, 60° কোণ দুইটি অঙ্কিত কর।

9. দ্বিখণ্ডন প্রক্রিয়া দ্বারা ত্রিভুজ হইতে নিম্নলিখিত কোণগুলি অঙ্কিত কর :

$$30°,\ 15°,\ 22\tfrac{1}{2}°,\ 52\tfrac{1}{2}°.$$

10. যে কোন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া উহার সমান আর একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

11. কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

12. স্কেল ও কম্পাসের সাহায্যে একটি সমকোণকে সমান তিন অংশে ভাগ কর।

13. যে কোন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর; উহার সদৃশকোণী দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার একটি ক্ষুদ্রতর আর একটি বৃহত্তর।

14. 4 সে. মি. ভূমির উপর একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর, যাহার সমান সমান বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকের দৈর্ঘ্য 6·5 সে. মি.।

15. ভূমি 6 সে. মি., একবাহু 10 সে. মি. ; সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটি অঙ্কিত কব।

16. ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমষ্টি 135°, ভূমি 6 সে. মি. ; সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

17. ভূমি 2·6 সে. মি., অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি 12·8 সে. মি. ; সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

18. অতিভুজ 8 সে. মি. ও তৎসংলগ্ন একটি কোণ 30° ; সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

19. অতিভুজ ও সমকোণ-বিন্দু হইতে উহার দূরত্ব দেওয়া আছে, সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

20. এমন একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার সূক্ষ্মকোণ দুইটি 30° ও 60°.

21. ভূমি ও উন্নতি দেওয়া আছে ; সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। Draw an isosceles triangle having given the base and the altitude.

22. শিরঃকোণ এবং উন্নতি দেওয়া আছে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। Draw an isosceles triangle having given the vertical angle and the altitude.

23. শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্ব এবং অপর দুই বাহু দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। Construct a triangle having given two sides and the perpendicular from the vertex to the base.

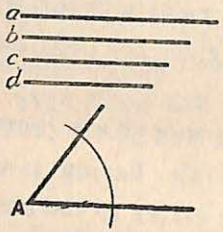
24. ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয় এবং বিপরীত শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্ব দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। Construct a triangle having given the angles at the base and the perpendicular from the vertex to the base. (C. U. 1937)

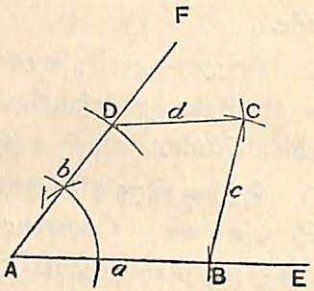
25. ভূমি এবং শিরঃকোণ দেওয়া আছে ; সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। Construct an isosceles triangle having given the base and the vertical angle.

চতুর্ভুজ

সম্পাদ্য 13

চারিটি বাহুর দৈর্ঘ্য এবং একটি কোণ নির্দিষ্ট আছে, চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a quadrilateral having given the lengths of four sides and one angle.]





মনে কর, a, b, c, d চারিটি বাহুর দৈর্ঘ্য এবং a ও b বাহু দুইটির অন্তর্ভূত কোণ A।

চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AE একটি সরলরেখা লও এবং উহা হইতে a-র সমান AB অংশ কাটিয়া লও।

AB সরলরেখার A-বিন্দুতে $\angle$A-র সমান করিয়া $\angle$BAF অঙ্কিত কর।

AF হইতে b-র সমান AD অংশ কাটিয়া লও।

B-কে কেন্দ্র করিয়া c-ব্যাসার্ধ লইয়া এবং D-কে কেন্দ্র করিয়া d-ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহারা C-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে।

CB ও CD সংযুক্ত কর।

তাহা হইলে, ABCD অভীষ্ট চতুর্ভুজ হইল।

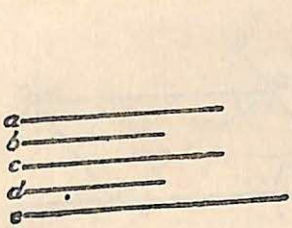
প্রমাণ। অঙ্কন অনুযায়ী $AB = a$, $AD = b$,

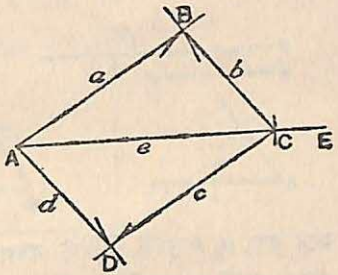
$BC = c$, $DC = d$.

a ও b-র অন্তর্ভূত কোণ = প্রদত্ত $\angle$A.

সম্পাদ্য 14

কোন চতুর্ভুজের চারিটি বাহু এবং একটি কর্ণ নির্দিষ্ট আছে; চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a quadrilateral, having given the lengths of the four sides and a diagonal.]





মনে কর, a, b, c, d চারিটি বাহু এবং e একটি কর্ণ।

এমন একটি চতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার বাহুগুলি a, b, c, d-র সমান এবং একটি কর্ণ e-র সমান।

অঙ্কন। AE একটি সরলরেখা লইয়া উহা হইতে e-র সমান AC অংশ কাটিয়া লও।

A-কে কেন্দ্র করিয়া a-ব্যাসার্ধ লইয়া এবং C-কে কেন্দ্র করিয়া b-ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহারা পরস্পর B-বিন্দুতে ছেদ করে।

আবার, C-কে কেন্দ্র করিয়া c-ব্যাসার্ধ লইয়া এবং A-কে কেন্দ্র করিয়া d-ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি চাপ অঙ্কিত কর, যেন উহারা AC-র যে পার্শ্বে B আছে তাহার বিপরীত পার্শ্বে D-বিন্দুতে ছেদ করে।

AB, BC, CD, DA যুক্ত কর।

তাহা হইলে, ABCD অভীষ্ট চতুর্ভুজ হইল।

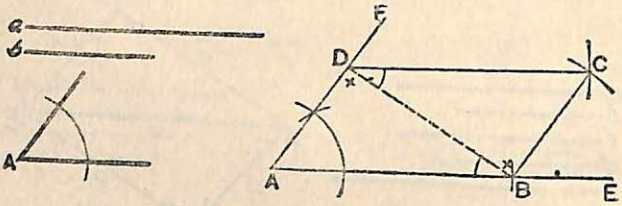
প্রমাণ। অঙ্কন অনুযায়ী, $AB = a$, $BC = b$,

$CD = c$, $DA = d$,

এবং কর্ণ $AC = e$.

সম্পাদ্য 15

কোন সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ নির্দিষ্ট আছে ; সামান্তরিকটি অঙ্কিত করিতে হইবে। [To construct a parallelogram, having given two adjacent sides and the angle included by them.]



মনে কর, a, b দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং A একটি নির্দিষ্ট কোণ।

এরূপ একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার দুইটি সন্নিহিত বাহু a ও b-র সমান এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ, $\angle$A-র সমান।

অঙ্কন। AE একটি সরলরেখা লইয়া উহা হইতে a-র সমান করিয়া AB অংশ কাটিয়া লও।

AE সরল রেখার A-বিন্দুতে $\angle$A-র সমান করিয়া $\angle$EAF অঙ্কিত কর।

AF হইতে b-র সমান করিয়া AD অংশ কাট।

D-কে কেন্দ্র করিয়া a-ব্যাসার্ধ লইয়া এবং B-কে কেন্দ্র করিয়া b-ব্যাসার্ধ লইয়া AB-র যে দিকে D আছে সেই দিকে দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহারা C-বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে।

BC, CD যুক্ত কর।

তাহা হইলে, ABCD অভীষ্ট সামান্তরিক হইল।

প্রমাণ। BD যুক্ত কর।

ABD ও BCD ত্রিভুজদ্বয়ে,

AB = DC, AD = BC, BD সাধারণ

$\therefore$ $\triangle ADB \equiv \triangle BCD$, $\therefore$ $\angle ABD$ = একান্তর $\angle BDC$, $\therefore$ AB $\parallel$ DC

এবং $\angle ADB$ = একান্তর $\angle DBC$, $\therefore$ AD $\parallel$ BC.

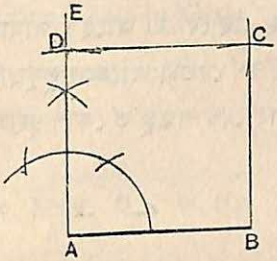
$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

দ্রষ্টব্য। নির্দিষ্ট A-কোণটি সমকোণ হইলে ABCD একটি আয়তক্ষেত্র হইবে।

সম্পাদ্য 16

একটি নির্দিষ্ট বাহুর উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

[To construct a square on a given side.]



AB একটি নির্দিষ্ট বাহু। ইহার উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। AB সরলরেখার A-বিন্দুতে AE লম্ব টান।

AE হইতে AB-র সমান করিয়া AD অংশ কাটিয়া লও।

B ও D-কে কেন্দ্র করিয়া এবং AB-ব্যাসার্ধ লইয়া এমন দুইটি চাপ অঙ্কিত কর যেন উহারা পরস্পর C-বিন্দুতে ছেদ করে। BC, CD যুক্ত কর।

তাহা হইলে ABCD অভীষ্ট বর্গক্ষেত্র হইল।

প্রমাণ। BD যুক্ত করিয়া সম্পাদ্য 15-এর ন্যায় প্রমাণ করা যায় যে ABCD একটি সামান্তরিক যাহার বাহুগুলি পরস্পরসমান এবং একটি কোণ সমকোণ।

সুতরাং ABCD একটি বর্গক্ষেত্র।

অনুশীলনী 36

1. 4·6 সে. মি. দীর্ঘ বাহুর উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।
2. 5·5 সে. মি. দীর্ঘ বাহুর উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।
3. একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর যাহার পরিসীমা 9·6 সে. মি.।
4. 6 সে. মি. কর্ণ-বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

5. সামান্তরিকটি অঙ্কিত কর, যাহার সন্নিহিত বাহু ও অন্তর্ভূত কোণের পরিমাণ :—

(1) 6 সে. মি., 2·4 সে. মি., 30°. (2) 7·4 সে. মি., 4·2 সে. মি., 60°
(3) 9 সে. মি., 4 সে. মি., 45°.

6. দুইটি কর্ণ ও এক বাহু দেওয়া আছে ; সামান্তরিকটি অঙ্কিত কর।

7. তিন বাহু ও দুই কর্ণ দেওয়া আছে, চতুর্ভুজটি অঙ্কিত কর।

8. তিন বাহু ও তাহাদের অন্তর্ভূত কোণ দুইটি দেওয়া আছে ; চতুর্ভুজটি অঙ্কিত কর।

9. AB, AD, ∠A, ∠B ও ∠D দেওয়া আছে ; ABCD চতুর্ভুজটি অঙ্কিত কর।

10. একটি বাহু ও একটি কোণ দেওয়া আছে ; রম্বসটি অঙ্কিত কর।

*11. দুইটি সন্নিহিত বাহু দেওয়া আছে ; আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর।

12. কর্ণ এবং এক বাহু দেওয়া আছে ; আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর।

13. কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর একটি রম্বস আঁক যাহার একটি কোণ 120°.

মাপিয়া প্রমাণ কর যে রম্বসটির ক্ষুদ্রতর কর্ণ উহার বাহুর সমান।

14. AB সরলরেখার উপর একটি আয়তক্ষেত্র ABCD অঙ্কিত কর। DAB কোণের সমদ্বিখণ্ডক AF টান যাহা DC-কে F বিন্দুতে ছেদ করে। FC-কে E পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন FE, AB-র সমান হয়। EB যুক্ত কর। মাপিয়া প্রমাণ কর ABEF ক্ষেত্রের পরিসীমা, ABCD আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

পরিশিষ্ট

জ্যামিতির নৈর্ব্যক্তিক পরীক্ষা

(Objective Tests in Geometry)

সপ্তম শ্রেণী

I. শূন্যস্থান পূর্ণ কর ঃ

(1) দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধের প্রত্যেকটিকে —— বলে।
(2) বিন্দুর মাত্রা ——।
(3) ঘন পদার্থের —— টি মাত্রা।
(4) দুইটি সরলরেখা —— টি বিন্দুতে ছেদ করে।
(5) কোন কোণের বাহুর দৈর্ঘ্য বর্ধিত করিলে ঐ কোণের পরিমাণ বর্ধিত ——।
(6) সূক্ষ্মকোণ — ডিগ্রী অপেক্ষা কম।
(7) বৃত্তের ব্যাসার্ধগুলি ——।
(8) বৃত্তের —— হইতে পরিধি সমদূরবর্তী।
(9) বিষমবাহু ত্রিভুজের তিনটি বাহু পরস্পর ——।
(10) রম্বসের বাহুগুলি —— কিন্তু কোণগুলি —— নহে।
(11) সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের —— কোণ ——।
(12) ট্রাপিজিয়মের —— মাত্র বাহু সমান্তরাল।

II. কয়েকটি ত্রিভুজের A, B, C, তিনটি কোণের দুইটির পরিমাণ দেওয়া আছে ; শূন্যস্থানে তৃতীয় কোণটির পরিমাণ লিখ ঃ

(1)	A = 90°	(2) A = 60°	(3) A = ——
	B = 45°	B = ——	B = 100°
	C = ——	C = 80°	C = 30°
(4)	A = 75°	(5) A = 65°	(6) A = ——
	B = 85°	B = ——	B = 68°
	C = ——	C = 45°	C = 72°

III. A, B, C, D, চতুর্ভুজের চারিটি কোণ ; উহাদের তিনটি কোণের পরিমাণ দেওয়া আছে ; চতুর্থ কোণটির পরিমাণ শূন্যস্থানে লিখ ঃ

(1)	(2)	(3)
A=90°	A=100°	A=70°
B=80°	B=70°	B=——
C=110°	C=——	C=120°
D=——	D=60°	D=90°

VI. শূন্যস্থানে শুদ্ধ উত্তর লিখ ঃ

(1) পঞ্চভুজের কোণসমষ্টি ———।
(2) স্থূলকোণী ত্রিভুজে কোন —— থাকিতে পারে না।
(3) সমকোণী ত্রিভুজে কোন —— থাকিতে পারে না।
(4) কোন ত্রিভুজে — বেশী সমকোণ থাকিতে পারে না।
(5) রম্বসের কোন কোণ —— হইতে পারে না।
(6) ত্রিভুজের দুইটি বাহু সমান হইলে উহাদের বিপরীত কোণ দুইটি —— হইতে পারে না।
(7) বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে একটি সরলরেখার উপর একটি লম্ব ও তিনটি তির্যক্ টানা হইয়াছে ; উহাদের মধ্যে —— ক্ষুদ্রতম।
(8) বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন সরলরেখার উপর —— বেশী লম্ব টানা যায় না।
(9) —— সরলরেখার কমে কোন স্থান সীমাবদ্ধ করা যায় না।

V. প্রত্যেক স্থলে অন্তঃকোণ সমূহের সমষ্টি কয় সমকোণ লিখ ঃ

ঋজুরেখ ক্ষেত্র	ত্রিভুজ	চতুর্ভুজ	পঞ্চভুজ	ষড়্ভুজ	সপ্তভুজ	অষ্টভুজ
সমকোণ সংখ্যা						

VI. কয়েকটি ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্যপরিমাণ দেওয়া আছে; যে বাহুর বিপরীত কোণ বৃহত্তম তাহার নীচে দাগ দাও ঃ

ত্রিভুজ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
বাহুর দৈর্ঘ্য	5 সে. মি.	4·6 সে. মি.	6·1 সে. মি.	5·2 সে. মি.	4·9 সে. মি	6 সে. মি.	55 মিলি মি.	7·6 সে. মি.	$6\frac{2}{5}$ সে.মি.
	4 সে. মি.	3·8 সে. মি.	4·2 সে. মি.	2·8 সে. মি.	5·2 সে মি	4 সে. মি.	36 মিলি মি.	5·3 সে. মি.	$4\frac{4}{5}$ সে.মি.
	3 সে. মি.	3·2 সে. মি	3·3 সে. মি	3·6 সে. মি	3·3 সে. মি.	3 সে. মি.	24 মিলি মি.	4·5 সে. মি.	$3\frac{1}{5}$ সে.মি.

VII. কয়েকটি ত্রিভুজের কোণের পরিমাণ দেওয়া আছে; যে কোণের বিপরীত বাহু বৃহত্তম তাহার ডানদিকে (´) চিহ্ন এবং যে কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতম তাহার ডানদিকে (") চিহ্ন দাও ঃ

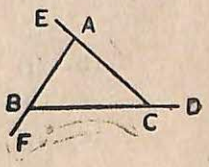
ত্রিভুজ	1	2	3	4	5	6	7	8
কোণ পরিমাণ	75°	35°	72°	90°	120°	59°	63°	77°
	80°	85°	68°	55°	35°	61°	58°	57°
	25°	60°	40°	35°	25°	60°	59°	46°

VIII. পাশের চিত্র দেখিয়া শুদ্ধ উত্তরের নীচে দাগ দাও ঃ

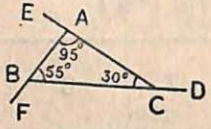
(1) ∠ABC এবং ∠ACD এর কোন্‌টি বৃহত্তর ?

(2) ∠CBF এবং ∠BAC এর কোন্‌টি বৃহত্তর ?

(3) ∠EAB এবং ∠ACB এর কোন্‌টি ক্ষুদ্রতর ?



IX. চিত্র দেখিয়া ডিগ্রীতে শুদ্ধ উত্তর লিখ ঃ

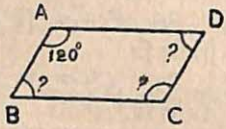


(1 $\angle ACD =$ ——

(2) $\angle EAB =$ ——

(3) $\angle FBC =$ ——

X. চিত্র দেখিয়া ডিগ্রীতে শুদ্ধ উত্তর লিখ ঃ



ABCB একটি সামান্তরিক,
যদি $\angle BAD = 120°$ হয়, তাহা হইলে,

(i) $\angle ABC =$ ——

(ii) $\angle BCD =$ ——

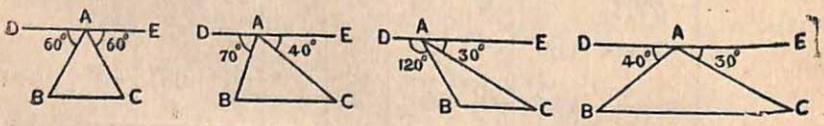
(iii) $\angle CDA =$ ——

XI. তিন বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে; যে স্থলে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব তথায় √ চিহ্ন এবং যে স্থলে সম্ভব নয় তথায় × চিহ্ন দাও ঃ

(i) 5 সে. মি., 4 সে. মি., 3 সে. মি. (ii) 6 সে. মি., 5 সে. মি., 3 সে. মি. (iii) 3 সে. মি, 4 সে. মি., 7 সে. মি. (iv) 5 সে. মি, 4 সে. মি. 7 সে. মি. (v) 8 সে. মি., 5 সে. মি, 3 সে. মি. (vi) 8 সে. মি, 5 সে. মি., 2 সে. মি.

XII. নীচের ত্রিভুজগুলি দেখিয়া (a), (b), (c)-এর উত্তর ডিগ্রীতে লিখ ঃ

(DAE ∥ BC)



(i) (ii) (iii) (iv)

(a) (i) $\angle BAC =$ —— (iii) $\angle BAC =$ ——

(ii) $\angle BAC =$ —— (iv) $\angle BAC =$ ——

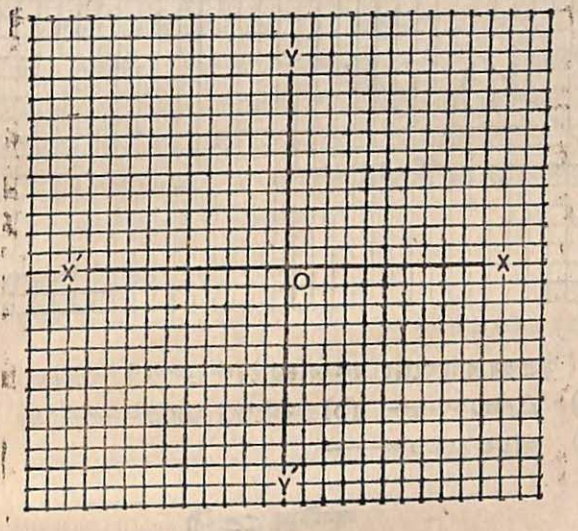
(b) (i) $\angle ABC =$ —— (iii) $\angle ABC =$ ——

(ii) $\angle ABC =$ —— (iv) $\angle ABC =$ ——

(c) (i) $\angle ACB =$ —— (iii) $\angle ACB =$ ——

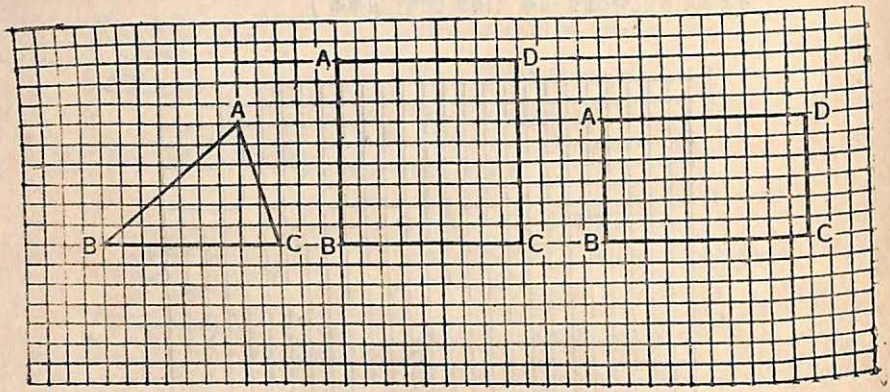
(ii) $\angle ACB =$ —— (iv) $\angle ACB =$ ——

XIII. নীচের ছক কাগজে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি স্থাপন কর ঃ
(ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য একক)



(1) A (3, 4)
(2) B (7, 6)
(3) C (-5,7)
(4) D (-6,-8)
(5) E (5, 0)
(6) F (0,-8)
(7) G (0, 7)
(8) H (-6, 0)

XIV. ছক কাগজে অঙ্কিত ক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ঃ



(ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ একক)

(a) $\triangle ABC =$ —— (b) বর্গক্ষেত্র ABCD = ——

(c) আয়ত ABCD = ——

অষ্টম শ্রেণী

I. শূন্যস্থানে উপযুক্ত উত্তর লিখ ঃ

(1) কোন ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ হইলে তাহাকে বলে—— ত্রিভুজ।

(2) সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের বিপরীত বাহুকে বলে ——।

(3) যে সরলরেখা ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুর সহিত বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু সংযুক্ত করে তাহাকে বলে ——।

(4) যে সরলরেখা চতুর্ভুজের দুই বিপরীত কৌণিক বিন্দু যুক্ত করে তাহাকে — বলে।

(5) সমকোণী ত্রিভুজের —— বৃহত্তম বাহু।

(6) ত্রিভুজের প্রত্যেকটি কোণ 60° হইলে উহা —— ত্রিভুজ।

(7) 30° কোণ ও 60° কোণ পরস্পর ——।

(8) 55° কোণ —— কোণের পূরক।

(9) 65° কোণ 115° কোণের —— ।

(10) 120° কোণ —— কোণের সম্পূরক ।

(11) যে কোণের পরিমাণ 195° তাহা একটি —— কোণ ।

(12) AB সরলরেখাটি CD সরলরেখার উপর দণ্ডায়মান হইয়া 90° কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। সুতরাং উহারা পরস্পর —— ।

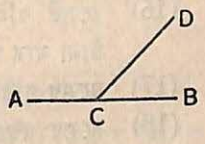
(13) একটি সমগ্র বস্তু উহার —— হইতে বৃহত্তর ।

(14) দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখার উভয়েই তৃতীয় কোন এক সরলরেখার —— হইতে পারে না ।

(15) (*i*) $\angle ACD + \angle DCB =$ ——

(*ii*) $\angle ACD + \angle DCB = 180°$,

সুতরাং AC ও CB —— অবস্থিত ।



(16) O-বিন্দুতে বিভিন্ন দিক হইতে পাঁচটি সরলরেখা মিলিত হইয়া যে পাঁচটি কোণ উৎপন্ন করে তাহাদের সমষ্টি —— ।

II শূন্যস্থান পূর্ণ কর ঃ

(1) একটি বিন্দুর মধ্য দিয়া —— বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে ।

(2) দুইটি বিন্দুর মধ্য দিয়া —— বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে ।

(3) একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে এইরূপ তিনটি বিন্দুর মধ্য দিয়া —— মাত্র বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে ।

(4) একটি বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া —— বৃত্ত অঙ্কিত হইতে পারে ।

(5) O কোন বৃত্তের কেন্দ্র ; ঐ বৃত্তের কেন্দ্রের বাহিরে AB একটি জ্যা । যদি AB-র মধ্যবিন্দু D হয়, তাহা হইলে OD এবং AB পরস্পর —— ।

(6) O কোন বৃত্তের কেন্দ্র ; ঐ বৃত্তের কেন্দ্রের বাহিরে AB একটি জ্যা । যদি OD, AB-র উপর লম্ব হয়, তাহা হইলে D, AB-র ——

(7) বৃত্তের সমান সমান জ্যাসমূহ কেন্দ্র হইতে —— ।

(8) অর্ধবৃত্তস্থ কোণ —— ।

(9) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ —— ।

(10) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ —— ।

(11) বৃত্তের কোন চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ 120° ; ঐ চাপের সম্মুখীন পরিধিস্থ কোণ ——।

(12) বৃত্তের একই বৃত্তাংশস্থ কোণগুলি ——।

(13) বৃত্তের অন্তর্লিখিত ABCD চতুর্ভুজের A-কোণ 70° হইলে, C-কোণ ——।

(14) বৃত্তের অন্তর্লিখিত ABCD চতুর্ভুজের $\angle A = 80^\circ$ এবং $\angle B = 110^\circ$ $\angle C =$ —— ডিগ্রী, $\angle D =$ —— ডিগ্রী।

(15) বৃত্তের স্পর্শক ও স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ পরস্পর ——।

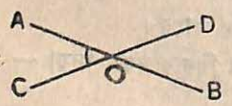
(16) বৃত্তের বহিঃস্থ কোনও বিন্দু হইতে যদি ঐ বৃত্তের দুইটি স্পর্শক টানা যায় তাহা হইলে ঐ স্পর্শক দুইটি —— হয়।

(17) বৃত্তের পরিধিস্থ কোন বিন্দুতে কয়টি স্পর্শক টানা যায় ? ——

(18) বৃত্তের অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তে কোন স্পর্শক আঁকা সম্ভব কি না ? ——

III AB ও CD সরলরেখা দুইটি O-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে ;

(1) যদি $\angle AOC = 40^\circ$ হয়, তাহা হইলে,



(a) $\angle AOD =$ —— ডিগ্রী।

(b) $\angle DOB =$ —— ডিগ্রী।

(c) $\angle BOC =$ —— ডিগ্রী।

(2) যদি $\angle COB + \angle AOD = 230^\circ$ হয়, তাহা হইলে,
$\angle AOC =$ —— ডিগ্রী।

(3) যদি $\angle AOC + \angle COB + \angle BOD = 280^\circ$ হয়, তাহা হইলে,

(a) $\angle AOC =$ —— ডিগ্রী।

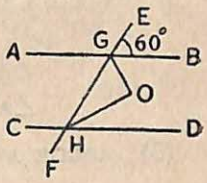
(b) $\angle COB =$ —— ডিগ্রী।

(c) $\angle BOD =$ —— ডিগ্রী।

(d) $\angle DOA =$ —— ডিগ্রী।

IV. AB ও CD সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল, EF উহাদিগকে G ও H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে ;

যদি $\angle BGE = 60°$ হয়, তাহা হইলে, (ডিগ্রীতে উত্তর লেখ)

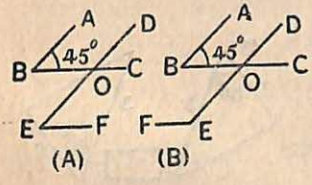


(1) $\angle EGA =$ ——
(2) $\angle AGH =$ ——
(3) $\angle GHC =$ ——
(4) $\angle CHF =$ ——
(5) $\angle FHD =$ ——
(6) $\angle DHG =$ ——
(7) $\angle HGB =$ ——

উক্ত চিত্রে BGH এবং GHD কোণের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে ;

(8) $\angle GOH =$ ——

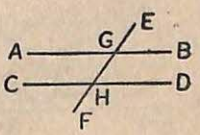
V. নীচে চিত্রে AB ∥ DE, BC ∥ EF, $\angle ABC = 45°$;



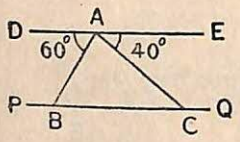
(1) $\angle DOC =$ —— ডিগ্রী।
(2) $\angle DEF$ (A) = ——ডিগ্রী।
(3) $\angle DEF$ (B) = ——ডিগ্রী।
(4) $\angle EOC =$ —— ডিগ্রী।

VI. শূন্যস্থান পূর্ণ কর ঃ

(1) পাশের চিত্রে, $\angle AGH = \angle GHD$,
$\therefore$ AB, CD ——



(2) নীচের চিত্রে PBCQ ∥ DAE, ∠DAB = 60°, ∠CAE = 40° ;



∴ ∠BAC = —— ডিগ্রী।

∠ABC = —— ডিগ্রী।

∠ACB = —— ডিগ্রী।

∠ABC + ∠BCA + ∠CAB = —— ডিগ্রী।

∠ABP = —— ডিগ্রী।

∠ACQ = —— ডিগ্রী।

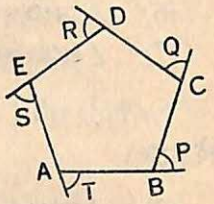
(3) ABCDE একটি পঞ্চভুজ ;

∠A + ∠B + ∠C + ∠D + ∠E =

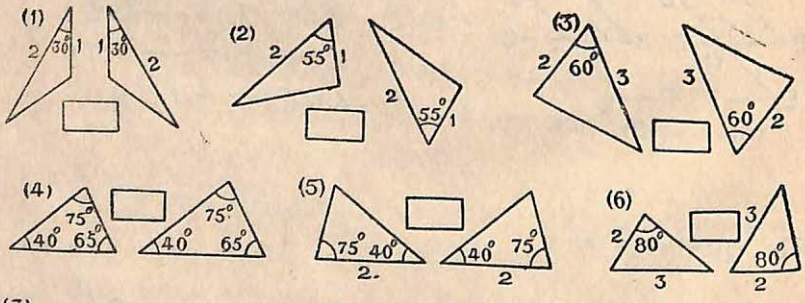
—— সমকোণ।

∠P + ∠Q + ∠R + ∠S + ∠T =

—— সমকোণ।

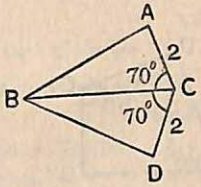


VII. নীচে কয়েক জোড়া ত্রিভুজের চিত্র রহিয়াছে, উহাদের মধ্যে যে দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম তাহাদের মধ্যে ≡ এইরূপ চিহ্ন এবং যে দুই দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম নহে তাহাদের মধ্যে × চিহ্ন দাও ঃ

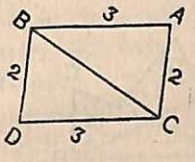


VIII. নীচের চিত্রগুলিতে দুই দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম কেন তাহার যুক্তি দেখাও ঃ

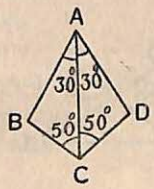
$\triangle ABC \equiv \triangle DBC$; কারণ,



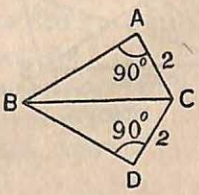
$\triangle ABC \equiv \triangle DBC$; কারণ,



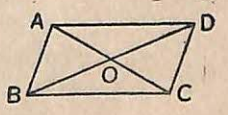
$\triangle ABC \equiv \triangle ADC$; কারণ,



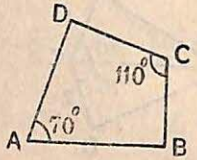
$\triangle ABC \equiv \triangle DBC$; কারণ,



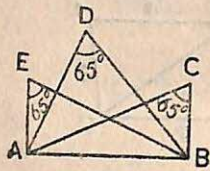
ABCD একটি সামান্তরিক, ইহার
$\triangle ABC \equiv \triangle ADC$; কারণ,



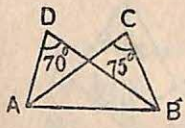
IX. নীচের চিত্রগুলি দেখিয়া প্রত্যেক প্রশ্নের শুদ্ধ উত্তরের নীচে দাগ দাও ঃ



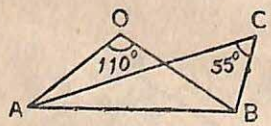
A, B, C, D বিন্দু দিয়া কোন বৃত্ত অঙ্কন করা যায় কি না ? [হাঁ, না]



A, B, C, D, E বিন্দু দিয়া কোন বৃত্ত অঙ্কন করা যায় কি না ? [হাঁ, না]



A, B, C, D বিন্দু দিয়া কোন বৃত্ত অঙ্কন করা যায় কি না ? [হাঁ, না]



OA = OB, O-কে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত আঁকিলে ঐ বৃত্ত C বিন্দু দিয়া যাইবে কি না ? [হাঁ, না]

INSTITUTE OF EDUCATION FOR WOMEN
Dept. of Education
SERVICE
CALCUTTA-17

জ্যামিতিক পরিভাষা

A

acute angle সূক্ষ্মকোণ
acute-angled সূক্ষ্মকোণী
adjacent সন্নিহিত
alternate একান্তর
alternative proof বিকল্প প্রমাণ
altitude, height উচ্চতা, উন্নতি
ambiguous case দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র
analysis বিশ্লেষণ
angle কোণ
angle in a segment বৃত্তাংশস্থ কোণ
angle of a sector বৃত্তকলার কোণ
arc চাপ
area ক্ষেত্রফল
arm বাহু, ভুজ
axiom স্বতঃসিদ্ধ
axis অক্ষ
axis of projection অভিক্ষেপাক্ষ
axis of symmetry প্রতিসাম্য অক্ষ

B

base ভূমি
bisection সমদ্বিখণ্ডন, দ্বিখণ্ডন
bisector সমদ্বিখণ্ডক, দ্বিখণ্ডক

C

centre কেন্দ্র
centroid ভরকেন্দ্র
chord জ্যা
chord of contact স্পর্শ-জ্যা
circle বৃত্ত
circum-centre পরিকেন্দ্র
circumference পরিধি
circumscribed পরিলিখিত
circumscribed circle, circum-circle পরিবৃত্ত
circum-radius পরিব্যাসার্ধ
coincidence সমাপতন
collinear (points) একরেখীয়, সমরেখ
common tangent সাধারণ স্পর্শক
complementary (angle) পূরক
concave প্রবৃদ্ধকোণী
concentric এককেন্দ্রীয়
conclusion সিদ্ধান্ত
concurrent সমবিন্দু
concyclic সমবৃত্ত
congruent সর্বসম
conjugate অনুবন্ধী, প্রতিযোগী
constant ধ্রুবক
construction অঙ্কন
contact স্পর্শ
converse বিপরীত
converse proposition বিপরীত প্রতিজ্ঞা
convex প্রবৃদ্ধকোণহীন
corollary অনুসিদ্ধান্ত
corresponding (angle) অনুরূপ
curved line, curve বক্ররেখা
curved surface, বক্রতল
cyclic বৃত্তস্থ

D

data উপাত্ত
decagon দশভুজ
deduction সিদ্ধান্ত
degree অংশ, ডিগ্রী
diagonal কর্ণ

diagonal scale কর্ণ-মাপনী
diameter ব্যাস
difference অন্তর
dimension মাত্রা
direct proof অন্বয়ী প্রমাণ
direct common tangent সরল সাধারণ স্পর্শক
direction দিক্
distance দূরত্ব
divided externally বহির্বিভক্ত
divided internally অন্তর্বিভক্ত
dodecagon দ্বাদশভুজ

E

enunciation নির্বচন
equiangular সদৃশকোণী
equidistant সমদূরবর্তী
equilateral সমবাহু
escribed বহির্লিখিত
escribed circle, ex-circle বহির্বৃত্ত
ex-centre বহিঃকেন্দ্র
exercise অনুশীলনী
ex-radius বহির্ব্যাসার্ধ
exterior angle বহিঃকোণ
external বহিঃস্থ
external bisector বহির্দ্বিখণ্ডক
external contact বহিঃস্পর্শ

F

figure চিত্র
flat ruler চ্যাপ্টা মাপনী
foot (of the perpendicular) পাদ-বিন্দু
formula সূত্র

G

general enunciation সাধারণ নির্বচন
graph লেখ
graphical লৈখিক

H

height, altitude উচ্চতা, উন্নতি
heptagon সপ্তভুজ
hexagon ষড়্ভুজ
horizontal অনুভূমিক
hypotenuse অতিভুজ
hypothesis কল্পনা
hypothetical construction কাল্পনিক অঙ্কন

I

identical একরূপ
identically equal সর্বতোভাবে সমান, সর্বসম
image প্রতিবিম্ব
in-centre অন্তঃকেন্দ্র
included angle অন্তর্ভূত কোণ
indirect proof ব্যতিরেকী প্রমাণ
in-radius অন্তর্ব্যাসার্ধ
inscribed অন্তর্লিখিত
inscribed circle, in-circle অন্তর্বৃত্ত
interior angle অন্তঃকোণ
interior opposite angle বিপরীত অন্তঃকোণ
internal অন্তঃস্থ
internal bisector অন্তর্দ্বিখণ্ডক
internal contact অন্তঃস্পর্শ
intersection ছেদ, প্রতিচ্ছেদ
irregular বিষম
isosceles সমদ্বিবাহু

L

limit সীমা
limiting point পরিণাম বিন্দু
limiting position পরিণাম অবস্থান
line রেখা
locus সঞ্চারপথ

M

magnitude মান, পরিমাণ
major arc অধিচাপ
maximum বৃহত্তম, গরিষ্ঠ, চরম
measure সংখ্যামান
measurement মাপন, মাপ
medial section মাধ্যমিক ছেদ
median মধ্যমা
middle point মধ্যবিন্দু
minimum অল্পতম, লঘিষ্ঠ, অবম
minor arc উপচাপ
minute মিনিট, কলা

N

negative ঋণাত্মক
nine-point centre নববিন্দু কেন্দ্র
nine-point circle নববিন্দু বৃত্ত
nonagon নবভুজ
normal অভিলম্ব
note দ্রষ্টব্য

O

oblique তির্যক
oblique projection তির্যক্ অভিক্ষেপ
obtuse-angle স্থূলকোণ
obtuse-angled স্থূলকোণী
octagon অষ্টভুজ
opposite বিপরীত
ortho-centre লম্ববিন্দু
orthogonal projection লম্ব অভিক্ষেপ

P

parallel সমান্তরাল
parallelogram সামান্তরিক
particular enunciation বিশেষ নির্বচন
pedal line পাদ-রেখা
pedal triangle পাদ-ত্রিভুজ
pentagon পঞ্চভুজ
perimeter পরিসীমা
perpendicular লম্ব
perpendicular bisector লম্ব-দ্বিখণ্ডক
plane, plane surface সমতল
plane geometry সামতলিক জ্যামিতি
point বিন্দু
point of concurrence সম্পাতবিন্দু
point of contact স্পর্শবিন্দু
point of intersection ছেদবিন্দু
point of medial section মাধ্যমিক ছেদবিন্দু
polygon বহুভুজ
position অবস্থান, অবস্থিতি
positive ধনাত্মক
postulate স্বীকার্য
practical ব্যবহারিক, ফলিত
problem সম্পাদ্য, প্রশ্ন
projection অভিক্ষেপ
proof প্রমাণ
proof by exhaustion বিকল্পখণ্ডন প্রমাণ
proposition প্রতিজ্ঞা
protractor চাঁদা, কোণচক্র
proved প্রমাণিত

Q

quadrilateral চতুর্ভুজ
quaesita করণীয়
quindecagon পঞ্চদশভুজ

R

radius ব্যাসার্ধ, অর
rectangle আয়ত ক্ষেত্র, আয়ত
rectilineal figure ঋজুরেখ ক্ষেত্র
reflex angle প্রবৃদ্ধ কোণ
regular সুষম
rhombus রম্বস, বিষমকোণী সমচতুর্ভুজ
right angle সমকোণ
right-angled সমকোণী

S

scale, ruler মাপনী
scalene triangle বিষমবাহু ত্রিভুজ
secant ছেদক
second সেকেণ্ড, বিকলা
sector of a circle বৃত্তকলা
segment (of a circle) বৃত্তাংশ
segment of a line খণ্ড, অংশ
self-conjugate স্বানুবন্ধ
self-evident স্বতঃ-প্রমাণ
semi-circle অর্ধবৃত্ত
set-square মাটাম, ত্রিকোণী
side বাহু, ভুজ
similar (triangle) সদৃশ
similar segment সদৃশ বৃত্তাংশ
similarity সাদৃশ্য
similitude সাম্য
size আয়তন
solid ঘন, ঘনবস্তু
solution সমাধান
space স্থান, দেশ
square বর্গক্ষেত্র
straight সরল
straight angle সরল কোণ
subtended angle সম্মুখ কোণ
superposition উপরিপাত
supplementary সম্পূরক
surface পৃষ্ঠ, তল
symmetry প্রতিসাম্য
symmetrically opposite প্রতিসমরূপে বিপরীত
synthesis সংশ্লেষণ

T

tangent স্পর্শক
theorem উপপাদ্য
theoretical তত্ত্বীয়, বাদীয়
thickness বেধ
transversal ছেদক, ভেদক
trapezium ট্রাপিজিয়ম, দ্বিসমান্তর চতুর্ভুজ
triangle ত্রিভুজ, ত্রিকোণ
triangulation ত্রিভুজে বিভক্তীকরণ
trisection ত্রিখণ্ডন, সমত্রিখণ্ডন
transverse common tangent তির্যক্ সাধারণ স্পর্শক

U

unit একক

V

variable চল
vertex শীর্ষবিন্দু, শীর্ষ
vertical উল্লম্ব
vertical angle শির:কোণ
vertically opposite angle বিপ্রতীপ কোণ
volume ঘনফল